AUTOREFERAT

Kamil Szpojankowski

Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Spis treści

1 Imię i nazwisko.

Kamil Szpojankowski

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.

- stopień naukowy doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka,
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2014,
  tytuł rozprawy doktorskiej: *Własności typu lukacsowskiego w wolnej probabilistyce*,
  promotor: prof. dr hab. Jacek Wesołowski.
- dyplom magistra matematyki,
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2010,
  tytuł pracy magisterskiej: *Wolne kwadratowe harnessy*,
  promotor: prof. dr hab. Jacek Wesołowski.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- **od 2015** adiunkt,
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska.
- **od 09.2015 do 08.2016** postdoctoral fellow,
  Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Kanada.

4 Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późn. zm.).

4.1 Tytuł

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

Kumulanty boolowskie w wolnej probabilistyce

4.2 Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

[H1] H. Bercovici, A. Nica, M. Noyes, K. Szpojankowski, Eta-diagonal distributions and infinite divisibility for R-diagonals, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 54(2) (2018), 907–937.

[H2] M. Fevrier, M. Mastnak, A. Nica, K. Szpojankowski, Using Boolean cumulants to study multiplication and anti-commutators of free random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(10) (2020), 7167–7205.

[H3] F. Lehner, K. Szpojankowski, Boolean cumulants and subordination in free probability, *Random Matrices Theory Appl.*, dostępna online (2020), https://doi.org/10.1142/S2010326321500362.

[H4] K. Szpojankowski, J. Wesołowski Conditional expectations through Boolean cumulants and subordination—towards a better understanding of the Lukacs property in free probability, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 17 (1) (2020), 253–272.

4.3 Omówienie osiągnięcia

4.3.1 Nieprzemienna probabilistyka

Wyniki badań składające się na osiągnięcie naukowe habilitanta dotyczą nieprzemiennej probabilistyki, a w szczególności wolnej probabilistyki. Jest to teoria zapoczątkowana przez Voiculescu w pracy [48], która od tego czasu dynamicznie się rozwija. Przed sformułowaniem i omówieniem wyników badań habilitanta, dla wygody czytelnika dość obszernie przedstawione zostaną niezbędne pojęcia dotyczące wolnej probabilistyki. Pozwoli to też umieścić w odpowiednim kontekście prezentowane wyniki. Szczegółowe wprowadzenie do nieprzemiennej probabilistyki można znaleźć w [34] i [39] .

Definicja 4.1. *Nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną nazywamy parę $(\mathcal{A}, \varphi)$, gdzie $\mathcal{A}$ jest algebrą z jedynką (oznaczaną przez $1_{\mathcal{A}}$), natomiast $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ jest funkcjonałem liniowym unormowanym tzn. $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$. Elementy algebry $\mathcal{A}$ nazywamy nieprzemiennymi zmiennymi losowymi. Jeśli φ spełnia $\varphi(ab) = \varphi(ba)$, dla wszystkich $a, b \in \mathcal{A}$ to mówimy, że φ jest śladowy. Algebra $\mathcal{A}$ jest $*$–algebrą gdy istnieje przekształcenie $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, takie że dla wszystkich $a, b \in \mathcal{A}$ $(a^*)^* = a$ oraz $(ab) = b^*a^*$. Gdy $\mathcal{A}$ jest $*$–algebrą oraz mamy $\varphi(aa^*) \geq 0$ dla wszystkich $a \in \mathcal{A}$ (czyli φ jest dodatni), to nieprzemienną przestrzeń probabilistyczną nazywamy $*$–przestrzenią probabilistyczną.*

Przykład 4.2. *Przykładami nieprzemiennych przestrzeni probabilistycznych są pary:*

a. $\left(L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),\mathbb{E}\right)$, *gdzie* $L^\infty(\Omega,\mathbb{P})$ *jest algebrą zmiennych ograniczonych zdefiniowanych na klasycznej przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, *natomiast* $\mathbb{E}$ *to wartość oczekiwana.*

b. $\left(M_N(\mathbb{C}),\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\right)$, *gdzie przez* $M_N(\mathbb{C})$ *oznaczamy algebrę macierzy wymiaru* $N\times N$ *o wyrazach zespolonych, natomiast* Tr *oznacza ślad macierzy.*

c. $\left(M_N\left(L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\right),\mathbb{E}\circ\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\right)\right)$, *gdzie* $M_N\left(L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\right)$ *to przestrzeń macierzy o wyrazach będących ograniczonymi zmiennymi losowymi, a* $\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\right)$ *to złożenie funkcjonałów z punktów a i b.*

d. Niech $\mathcal{H}$ *będzie przestrzenią Hilberta oraz niech* $B(\mathcal{H})$ *będzie algebrą operatorów liniowych, ograniczonych na* $\mathcal{H}$. *Niech* $\mathcal{A}$ *będzie podalgebrą* $B(\mathcal{H})$ *z jedynką (tzn. zawierającą operator identycznościowy). Ustalmy* $\xi_0\in\mathcal{H}$ *taki, że* $||\xi_0||=1$, *i zdefiniujmy* $\varphi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ *jako* $\varphi(a)=\langle a\xi_0,\xi_0\rangle$, *wtedy* $(\mathcal{A},\varphi)$ *jest nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną.*

Uwaga 4.3. *W powyższych przykładach zamiast ograniczonych zmiennych losowych można rozważać przestrzeń* $L^{\infty-}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=\bigcap_{p=1}^\infty L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, *czyli zmienne losowe o wszystkich momentach skończonych. Większość wyników przedstawiona w dalszej części dotyczyć będzie ograniczonych zmiennych losowych.*

Przykłady przedstawione w punktach a,b i c powyżej są elementarne i mają na celu wskazanie możliwej realizacji klasycznych zmiennych losowych i macierzy losowych w ramach nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej. Natomiast typowe przykłady nieprzemiennych przestrzeni probabilistycznych są związane z punktem d. Typowo zakładamy, że jest $\mathcal{A}$ *jest* C^**-algebrą lub algebrą von Neumanna oraz* φ *będący tzw. stanem na odpowiedniej algebrze. Szczegóły dotyczące* C^**-algebr, algebr von Neumanna i funkcjonałów na tych algebrach można znaleźć na przykład w [46].*

W przypadku gdy $\mathcal{A}$ *jest* C^**-algebrą oraz funkcjonał* φ *jest dodatni nieprzemienną przestrzeń probabilistyczną nazywamy* C^**-przestrzenią probabilistyczną.*

Gdy $\mathcal{A}$ *jest algebrą von Neumanna oraz* φ *jest dodatni, wierny oraz normalny (czyli ciągły względem topologi słabej z gwiazdką), to nieprzemienną przestrzeń probabilistyczną nazywamy* W^**-przestrzenią probabilistyczną.*

Definicja 4.4. *Niech* $(\mathcal{A},\varphi)$ *będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną, niech* $a\in\mathcal{A}$ *będzie zmienną losową samosprzężoną, tzn.* $a=a^*$. *Jeśli istnieja miara* μ *taka, że*

$$\varphi\left(a^n\right)=\int_{\mathbb{R}}t^n d\mu(t),\quad \text{dla } n\geq 1.$$

to μ *nazywamy rozkładem zmiennej* a.

Uwaga 4.5. *W przypadku gdy* $\mathcal{A}$ *jest* C^**-algebrą, wtedy dla każdej samosprzężonej zmiennej losowej* a *istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona miara* μ, *opisana w Definicji 4.4, będąca rozkładem* a.

Przykład 4.6. *Rozpatrzmy nieprzemienną przestrzeń probabilistyczną* $\left(M_N(\mathbb{C}),\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\right)$ *z Przykładu 4.2(b). Niech* $A\in M_N(\mathbb{C})$ *będzie hermitowska i oznaczmy jej wartości własne (wypisane z krotnościami) przez* $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$. *Wtedy łatwo zauważyć, że rozkład zmiennej* A *to miara* μ *zadana przez*

$$\mu=\frac{1}{N}\left(\delta_{\lambda_1}+\ldots+\delta_{\lambda_N}\right).$$

Dla zmiennej nie samosprzężonej a definiuje się tzw. $*$–rozkład wyznaczony przez $*$–momenty.

Definicja 4.7. *Niech a będzie zmienną losową w $*$–przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \varphi)$. Wyrażenie postaci*

$$\varphi\left(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_n}\right) \qquad \text{dla } n \geq 0 \text{ oraz } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, *\}$$

nazywamy $*$–momentem zmiennej losowej a.

Definicja 4.8. *Przez $\mathbb{C}\langle X, X^*\rangle$ oznaczać będziemy algebrę z jedynką, nazywaną algebrą nieprzemiennych wielomianów generowanych przez X, X^*. Jest to algebra której bazę stanowią jednomiany postaci $X^{\varepsilon_1} \cdots X^{\varepsilon_n}$, gdzie $n \geq 0$ oraz $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, *\}$. Mnożenie jednomianów zadane jest przez konkatenację.*

Definicja 4.9. *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$, będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną, $*$–rozkładem zmiennej losowej $a\mathcal{A}$ nazywamy funkcjonał $\mu : \mathbb{C}\langle X, X^*\rangle \to \mathbb{C}$ zdefiniowany jako*

$$\mu(P) = \varphi\left(P(a, a^*)\right) \qquad \text{dla } P \in \mathbb{C}\langle X, X^*\rangle.$$

Uwaga 4.10. *Pomimo, że definicja $*$-rozkładu wydaje się zawierać tylko informację kombinatoryczną na temat $*$-momentów, warto zauważyć, że niesie on bardzo wiele informacji na temat zmiennej losowej i dobre zrozumienie kombinatorycznych własności $*$-rozkładu jest istotnym zagadnieniem. Na przykład jeżeli a i b są dwiema nieprzemiennymi zmiennymi losowymi o takim samym $*$-rozkładzie, oraz oznaczymy przez $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ C^*–algebry generowane przez a i b odpowiednio, to istnieje izometryczny izomorfizm pomiędzy $\mathcal{M}$ oraz $\mathcal{N}$.*

Dla ustalonej macierzy, jej $*$-rozkład pozwala uzyskać pełną informację o empirycznym rozkładzie wartości własnych.

Podobnie dla tzw. miary Browna (zob. [7, 23, 34]), $*$-rozkład zawiera pełną informację niezbędną do obliczenia miary Browna, aczkolwiek praktyczne wykorzystanie tej informacji do obliczenia miary Browna w konkretnych przykładach jest nietrywialnym problemem.

Podobnie jak w przypadku klasycznym, jednym z centralnych pojęć nieprzemiennej probabilistyki jest niezależność. Przyjmując, że zmienne są niezależne jeśli rozkład łączny jest jednoznacznie wyznaczony przez rozkłady brzegowe (innymi słowy momenty łączne można w uniwersalny sposób wyznaczyć za pomocą momentów brzegowych), w nieprzemiennej probabilistyce istnieje kilka rodzajów niezależności (wolna, boolowska, monotoniczna, anty-monotoniczna). Natomiast niezależność wolną uważa się za najbardziej naturalną i fundamentalną niezależność nieprzemienną (zob. Lecture 5 w [39]). Wynika to z jej naturalnych związków z teorią algebr von Neumanna, czy z teorią macierzy losowych. Związki z teorią macierzy losowych opisane są krótko w dalszej części autoreferatu.

Definicja 4.11. *Podalgebry z jedyną $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ nazywamy wolnymi, gdy dla wszystkich $k \geq 1$ zawsze gdy spełnione są warunki:*

- $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$, *dla* $i = 1, \ldots, k$
- $\varphi(a_i) = 0$ *dla* $i = 1, \ldots, k$,
- $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(k)$,

to mamy $\varphi(a_1 \cdots a_k) = 0$.

Uwaga 4.12. *Zmienne losowe a, b będziemy nazywać wolnymi gdy algebra generowana przez a i $1_{\mathcal{A}}$ oraz algebra generowana przez b i $1_{\mathcal{A}}$ są wolne.*

Dla zmiennych nie samosprzężonych będziemy mówili, że są $*$-wolne gdy algebra generowana przez a, a^* i $1_{\mathcal{A}}$ oraz algebra generowana przez b, b^* i $1_{\mathcal{A}}$ są wolne.

Wolne zmienne losowe mogą być zrealizowane na nieprzemiennych przestrzeniach probabilistycznych związanych z Przykładem 4.2 d. Nie istnieją macierze skończonego wymiaru, czy macierze losowe skończonego wymiaru, które są wolne. Natomiast tak jak pisaliśmy wcześniej wolność pojawia się w naturalny sposób w związku z asymptotyką macierzy losowych, gdy rozmiar macierzy dąży do nieskończoności. Związki te zostały zauważone w pracy [50] szczegółowe omówienie można znaleźć w monografii [34]. Związki wolnej probabilistyki z teorią macierzy losowych są intensywnie badanym zagadnieniem (zob. na przykład [1, 20, 41, 4]). W poniższym autoreferacie związki z macierzami losowymi wykorzystywane będą do ilustracji zastosowań przedstawianych wyników, poniżej w skrócie wyjaśniamy na czym ten związek polega.

Uwaga 4.13. *Załóżmy, że $(A_N)_N$ oraz $(B_N)_N$ są ciągami diagonalnych macierzy, przy czym A_N oraz B_N są wymiaru $N \times N$ dla $N = 1, 2, \ldots$. Oznaczmy przez μ_{A_N}, μ_{B_N} empiryczne rozkłady wartości własnych macierzy A_N i B_N, załóżmy że μ_{A_N} zbiega słabo do miary μ oraz μ_{B_N} zbiega słabo do ν. Przez U_N oznaczać będziemy losową macierz o rozkładzie Haara na grupie macierzy unitarnych rozmiaru $N \times N$. Rozważmy nieprzemienną przestrzeń probabilistyczną $(\mathcal{A}, \varphi)$ zawierającą wolne zmienne a, b o rozkładach μ, ν odpowiednio. Wtedy dla dowolnego nieprzemiennego wielomianu P zachodzi*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}Tr(P(A_N, U_N B_N U_N^*)) = \varphi(P(a, b))$$

Powyższa własność to tak zwana asymptotyczna wolność macierzy losowych. Własność ta zachodzi w dużo większej ogólności, dla niezależnych macierzy losowych unitarnie niezmienniczych. Dodatkowo powyższa zbieżność zachodzi prawie na pewno to znaczy z p-stwem 1 mamy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Tr(P(A_N, U_N B_N U_N^*)) = \varphi(P(a, b)).$$

W poniższym autoreferacie pewną rolę w pracy [H1] odgrywać będzie niezależność Boolowska zdefiniowana w [45] wywodząca się z badań w pracach [17, 15, 18].

Definicja 4.14. *Podalgebry $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ nazywamy boolowsko niezależnymi gdy, dla wszystkich $k \geq 1$ oraz wszystkich $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ jeśli:*

- *$a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$, dla $i = 1, \ldots, k$*
- *$j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(k)$,*

to $\varphi(a_1 \cdots a_k) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_k)$

Struktury związane z niezależnością boolowską, są łatwiejsze niż związane z wolnością. Niezależność boolowska nie pojawia się też w naturalny sposób w teorii macierzy losowych. Okazuje się jednak, że niezależność boolowska posiada nietrywialne związki z wolną probabilistyką. Teoria ta dostarcza narzędzi pozwalających rozwiązywać problemy związane bezpośrednio z wolnością. Prace [H1]–[H4] dotyczą zagadnień pochodzących bezpośrednio z wolnej

nieprzecinająca interwałowa

Rysunek 1: Różne rodzaje partycji

probabilistyki, które rozwiązywane są za pomocą kumulant boolowskich. Kumulanty boolowskie to rodzina funkcjonałów która w naturalny sposób pojawia się w związku z niezależnością boolowską. To, że kumulanty boolowskie okazują się wygodnym narzędziem do rozwiązywania pewnych problemów pochodzących z wolnej probabilistyki jest dość zaskakujące i w opinii habilitanta jest najważniejszą obserwacją metodologiczną poczynioną we wspomnianej powyżej serii prac. Jest to wyjście poza schemat standardowej metodologii badań w nieprzemiennej probabilistyce, gdzie kumulanty wolne były głównym narzędziem do badania problemów w wolnej probabilistyce, natomiast kumulanty boolowskie służyły jako narzędzie do badania zmiennych boolowsko niezależnych. Okazuje się, że to wyjście poza przyjęty schemat daje zaskakujące efekty i pozwala odpowiadać na nietrywialne pytania, na które odpowiedź wcześniej nie była znana.

W kolejnej sekcji podane zostaną definicje kumulant boolowskich i wolnych oraz omówione są struktury kombinatoryczne z nimi związane.

4.3.2 Różne rodzaje partycji i kumulant

Istotnym narzędziem zarówno w teorii nieprzemiennej probabilistyki jaki i w badaniach zawartych w pracach [H1]–[H4] są kumulanty. Do zdefiniowania kumulant niezbędne są definicje różnych rodzajów partycji zbioru liniowo uporządkowanego.

Definicja 4.15.

1. *Ustalmy dodatnią liczbę całkowitą n oraz oznaczmy $[n] := \{1, \dots, n\}$. Partycją π zbioru $[n]$ nazwiemy zbiór niepustych, parami rozłącznych podzbiorów $B_1, \dots, B_k \subseteq [n]$, takich że $\bigcup_{j=1}^k B_j = [n]$. Zbiory B_j dla $j = 1, \dots, k$ nazywamy blokami π, liczbę bloków π oznaczamy przez $|\pi|$, czyli mamy $|\pi| = k$.*

   Zbiór wszystkich partycji zbioru $[n]$ jest oznaczany przez $P(n)$.

2. *Mówimy, że $\pi \in P(n)$ jest nieprzecinająca jeśli dla dowolnych $B_1, B_2 \in \pi$ oraz $1 \le i_1 < j_1 < i_2 < j_2 \le n$,*

   $$(i_1, i_2 \in B_1 \quad \text{oraz} \quad j_1, j_2 \in B_2) \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2.$$

   Zbiór wszystkich nieprzecinających partycji zbioru $[n]$ oznaczamy przez $NC(n)$.

3. *Powiemy, że $\pi \in P(n)$ jest partycją interwałową jeśli dla dowolnych $B_1, B_2 \in \pi$ oraz $1 \le i_1 < j_1 < i_2 \le n$*

   $$(i_1, i_2 \in B_1 \quad \text{oraz} \quad j_1 \in B_2) \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2.$$

   Zbiór wszystkich partycji interwałowych zbioru $[n]$ jest oznaczany przez $Int(n)$.

Na zbiorach $P(n), NC(n)$ oraz $Int(n)$ istnieje częściowy porządek oznaczany przez $\le$, tzw. porządek odwrotnego rozdrobnienia (*reversed refinement order*).

Definicja 4.16. *Dla $\pi, \sigma \in \mathcal{P}(n)$ mówimy, że $\pi \leq \sigma$ gdy dla dowolnego bloku $B \in \pi$ istnieje blok $C \in \sigma$, taki że $B \subseteq C$. Porządek $\leq$ jest również częściowym porządkiem na zbiorach $NC(n)$ i $Int(n)$.*

Przez 1_n oznaczać będziemy maksymalną partycję zbioru $[n]$ względem porządku $\leq$, tj. partycję z jednym blokiem równym $[n]$.

Na zbiorze $NC(n)$ będziemy rozważać również inny częściowy porządek $\ll$. Dla $\pi, \sigma \in NC(n)$ powiemy, że $\pi \ll \sigma$ gdy $\pi \leq \sigma$ oraz dla dowolnego $C \in \sigma$ istnieje blok $B \in \pi$ taki, że $\min(C), \max(C) \in B$.

Okazuje się, że $(NC(n), \leq)$ i $(Int(n), \leq)$ mają strukturę kraty, (zob. [39], Lecture 9 i 10).
W dalszej części autoreferatu wykorzystywać będziemy antyizomorfizm kraty nieprzecinających partycji, tzw. dopełnienie Krewerasa zdefiniowane w [28].

Definicja 4.17. *Ustalmy nieprzecinającą partycję $\pi \in NC(n)$, dopełnieniem Krewerasa partycji π nazywamy partycję oznaczaną przez $K(\pi)$ która jest największą (względem porządku $\leq$) nieprzecinającą partycją zbioru $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}\}$, taką że $\pi \cup K(\pi)$ jest nieprzecinającą partycją zbioru $\{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \ldots, n, \bar{n}\}$. Zbiór $\{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \ldots, n, \bar{n}\}$ utożsamiamy w kanoniczny sposób ze zbiorem $[2n]$, stąd definicja nieprzecinającej partycji na tym zbiorze jest taka jak w Definicji 4.15.*

Ustalmy nieprzemienną przestrzeń probabilistyczną $(\mathcal{A}, \varphi)$. Za pomocą funkcjonału φ definiujemy rodzinę wieloliniowych funkcjonałów multiplikatywnych, które posłużą do definicji kumulant.

Definicja 4.18. *Niech $\pi = \{B_1, \ldots, B_k\} \in \mathcal{P}(n)$. Dla $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ oznaczmy*

$$\varphi_\pi(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{k} \varphi\left(a_{B_j}\right) \tag{1}$$

gdzie

$$\varphi\left(a_{B_j}\right) = \varphi\left(\prod_{i \in B_j} a_i\right)$$

oraz zmienne w iloczynie $\prod_{i \in B_j} a_i$ pojawiają się zgodnie z porządkiem indeksów. Dla $\pi = 1_k$ będziemy pisać $\varphi_{1_k}(a_1, \ldots, a_k) = \varphi_k(a_1, \ldots, a_k)$

Następnie przywołamy definicję wolnych i boolowskich kumulant. Wolne kumulanty, zdefiniowane w [44], są ważnym narzędziem w wolnej probabilistyce, kumulanty boolowskie zostały zdefiniowane w pracy [45] jako narzędzie dające charakteryzację boolowskiej niezależności.

Definicja 4.19. *Dla dowolnego $n \geq 1$ wolna kumulanta rzędu n oznaczana przez $\kappa_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}$ jest zdefiniowana rekurencyjnie przez zależność*

$$\forall m \geq 1 \quad \forall a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A} \qquad \varphi(a_1 \cdots a_m) = \sum_{\pi \in NC(m)} \kappa_\pi(a_1, \ldots, a_m),$$

gdzie dla $\pi = \{B_1, \ldots, B_k\} \in NC(m)$ mamy

$$\kappa_\pi(a_1, \ldots, a_m) = \prod_{\substack{B_i \in \pi \\ B_i = \{i_1, \ldots, i_j\}}} \kappa_j\left(a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}\right).$$

Podobnie, dla dowolnego $n \geq 1$ kumulanty boolowskie $\beta_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}$ są zdefiniowane rekurencyjnie przez

$$\forall m \geq 1 \quad \forall a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A} \qquad \varphi(a_1 \cdots a_m) = \sum_{\pi \in Int(m)} \beta_\pi(a_1, \ldots, a_m),$$

gdzie dla $\pi = \{B_1, \ldots, B_k\} \in Int(m)$ mamy

$$\beta_\pi(a_1, \ldots, a_m) = \prod_{\substack{B_i \in \pi \\ B_i = \{i_1, \ldots, i_k\}}} \beta_k\left(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\right).$$

Gdy a ma rozkład μ będziemy pisać wymiennie $\kappa_n(\mu), \kappa_n(a)$ mając na myśli wielkość $\kappa_n(a, \ldots, a)$ pojawiającą się w powyższej definicji. Podobne oznaczenie będziemy stosować dla kumulant boolowskich.

Wolne kumulanty dają wygodny i użyteczny opis wolności.

Twierdzenie 4.20 (Speicher, [44]). *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną oraz niech $(\kappa_n)_{n\geq 1}$ będą wolnymi kumulantami. Ustalmy rodzinę podalgebr $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) Podalgebry $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ są wolne.

(ii) Dla dowolnego $n \geq 2$ oraz dla wszystkich $a_i \in \mathcal{A}_{i(j)}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ mamy $\kappa_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ zawsze gdy istnieją $1 \leq l, k \leq n$, takie że $i(l) \neq i(k)$.

W analogiczny sposób kumulanty boolowskie dają charakteryzację niezależności boolowskiej.

Twierdzenie 4.21 (Speicher, [45]). *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną oraz niech $(\beta_n)_{n\geq 1}$ będą boolowskimi kumulantami. Ustalmy rodzinę podalgebr $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) Podalgebry $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ są boolowsko niezależne.

(ii) Dla dowolnego $n \geq 2$ oraz dla wszystkich $a_i \in \mathcal{A}_{i(j)}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ mamy $\beta_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ zawsze gdy istnieją $1 \leq l, k \leq n$, takie że $i(l) \neq i(k)$.

W dalszej części pracy istotny będzie wzór łączący wolne i boolowskie kumulanty pochodzący z pracy [5].

Stwierdzenie 4.22. *Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ mamy*

$$\beta_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \ll 1_n}} \kappa_\pi(\,(a_1, \ldots, a_n)\,). \tag{2}$$

Ogólniej dla $\pi \in NC(n)$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ mamy

$$\beta_\pi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{\rho \in NC(n) \\ \rho \ll \pi}} \kappa_\pi(\,(a_1, \ldots, a_n)\,). \tag{3}$$

Gdzie porządek $\ll$ jest taki jak w Definicji 4.16.

4.3.3 Sploty, subordynacja i warunkowe wartości oczekiwane

Niezależność prowadzi w naturalny sposób do definicji splotu miar probabilistycznych.

Definicja 4.23. *Dla zmiennych wolnych, samosprzężonych a, b o rozkładach μ, ν odpowiednio rozkład zmiennej $a + b$ nazywamy wolnym splotem miar μ i ν oraz oznaczamy przez $\mu \boxplus \nu$.*

Jeśli a jest nieujemna to można w jednoznaczny sposób zdefiniować dodatnią zmienną losową $\sqrt{a}$ i rozkład zmiennej losowej $\sqrt{a}b\sqrt{a}$ nazywamy wolnym splotem multiplikatywnym miar μ i ν i oznaczamy przez $\mu \boxtimes \nu$.

W podobny sposób definiuje się wolny splot addytywny i multiplikatywny $*$-rozkładów.

Definicja 4.24. *Dla zmiennych $*$-wolnych a, b o $*$-rozkładach μ, ν odpowiednio $*$-rozkład zmiennej $a + b$ nazywamy wolnym splotem μ i ν oraz oznaczamy przez $\mu \boxplus \nu$.*

$*$-Rozkład zmiennej losowej ab nazywamy wolnym splotem multiplikatywnym $*$-rozkładów μ i ν i oznaczamy przez $\mu \boxtimes \nu$.

Uwaga 4.25. *Tak jak zostało to podane powyżej stosuje się to samo oznaczenie $\boxplus$ i $\boxtimes$ zarówno w przypadku splotu miar probabilistycznych jak i w przypadku splotu $*$-rozkładów. Za każdym razem gdy będziemy odwoływać się do wolnego splotu z kontekstu będzie jasne, którą z operacji mamy na myśli.*

Definicja 4.26. *Dla zmiennych boolowsko niezależnych, samosprzężonych a, b o rozkładach μ, ν odpowiednio rozkład zmiennej $a+b$ nazywamy wolnym splotem miar μ i ν oraz oznaczamy przez $\mu \uplus \nu$.*

W analogiczny sposób definiuje się splot boolowski $*$-rozkładów.

Definicja boolowskiego splotu multiplikatywnego nie jest istotna dla wyników przedstawianych w dalszej części autoreferatu.

Poniżej wyjaśniamy w jaki sposób odpowiednie kumulanty pozwalają opisywać zdefiniowane powyżej operacje.

Uwaga 4.27. *Korzystając z wieloliniowości wolnych kumulant oraz Twierdzenia 4.20 łatwo widać, że dla a, b wolnych oraz wszystkich $n \geq 1$ mamy*

$$\kappa_n(a + b) = \kappa_n(a) + \kappa_n(b).$$

Podobnie dla a', b' boolowsko niezależnych o mamy

$$\beta_n(a' + b') = \beta_n(a') + \beta_n(b').$$

W pracy [36] udowodniono, że dopełnienie Krewerasa w naturalny sposób pojawia się przy badaniu iloczynów wolnych zmiennych losowych.

$$\kappa_n(ab) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a)\kappa_{K(\pi)}(b).$$

Uwaga 4.28. *Przy założeniach Definicji 4.23, gdy obie zmienne a, b są nieujemne to przy założeniu śladowości φ rozkłady $\sqrt{a}b\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}a\sqrt{b}$ są takie same, dokładniej mamy*

$$\varphi\left(\left(\sqrt{a}b\sqrt{a}\right)^n\right) = \varphi\left(\left(\sqrt{b}a\sqrt{b}\right)^n\right) = \varphi\left((ab)^n\right).$$

Zwróćmy uwagę, że zmienna ab nie jest samosprzężona i jako taka posiada nietrywialny $*$-rozkład. Kombinatoryka wolnych kumulant pozwala na dokładny opis rozkładu $\sqrt{a}b\sqrt{a}$ natomiast $*$–rozkład ab nie posiadał dobrego opisu w terminach rozkładów a i b. Znalezienie $*$–rozkładu iloczynu wolnych zmiennych było problemem otwartym, jego rozwiązanie jest jednym z wyników pracy [H2] opisanej szczegółowo w dalszej części autoreferatu.

Opisane powyżej sploty miar mogą być efektywnie znajdowane za pomocą narzędzi analitycznych.

Definicja 4.29. *Transformatą Cauchy'ego miary μ nazywamy funkcję określoną jako*

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x), \ \ \textit{dla } z \notin \mathrm{supp}(\mu).$$

Uwaga 4.30. *Dla dowolnej miary μ funkcja G_μ jest analitycznym przekształceniem z górnej półpłaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$ w dolną półpłaszczyznę zespoloną $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) < 0\}$.*

Z transformaty Cauchy'ego można odzyskać miarę za pomocą tzw. wzoru na odwrócenie Stjeltiesa

$$d\mu(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} Im\left(G_\mu(x + i\varepsilon)\right) dx,$$

gdzie powyższa granica jest granicą w sensie słabej zbieżności miar probabilistycznych.

Okazuje się, że dla miar o nośniku zwartym transformata Cauchy'ego jest odwracalna w pewnym otoczeniu nieskończoności, a odwrotność transformaty Cauchy'ego po zlikwidowaniu singularności w zerze (tj. odjęciu $1/z$) odgrywa rolę podobną do logarytmu funkcji charakterystycznej w klasycznej probabilistyce. Funkcję zdefiniowaną w poniższym twierdzeniu nazywać będziemy R-transformatą miary μ.

Twierdzenie 4.31 (Voiculescu, [48])**.** *Dla dowolnej miary o nośniku zwartym istnieje otoczenie zera, takie że dobrze określona jest funkcja*

$$r_\mu(z) = G_\mu^{\langle -1 \rangle}(z) - \frac{1}{z}.$$

Nazywamy ją R-transformatą. W otoczeniu zera na którym określone są wszystkie poniżej występujące funkcje mamy

$$r_{\mu \boxplus \nu}(z) = r_\mu(z) + r_\nu(z).$$

Uwaga 4.32. *Wolne kumulanty są współczynnikami w rozwinięciu wokół zera R-transformaty tj. mamy*

$$r_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n(\mu) z^{n-1}.$$

W dalszej części będziemy też jako R-transformatę określać funkcję $R_\mu(z) = z r_\mu(z)$.

W pracy [49] Voiculescu zdefiniował tzw. S-transformatę która pozwala na znajdowanie splotu multiplikatywnego miar na półprostej dodatniej. Przez Ψ_μ oznaczać będziemy tzw. transformatę momentową

$$M_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{zx}{1 - zx} d\mu(x),$$

określoną dla $z \in \mathbb{C}$, takich że $1/z \notin \mathrm{supp}(\mu)$. Jeśli μ ma nośnik zwarty to w pewnym otoczeniu zera mamy $M_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n m_n(\mu)$, gdzie $m_n(\mu)$ to n-ty moment miary μ.

Twierdzenie 4.33. *Niech miary μ i ν mają nośnik zawarty w $[0,+\infty)$. Istnieje otoczenie przedziału $(-\varepsilon,0)$, dla pewnego $\varepsilon>0$ taki, że funkcja*

$$S_\mu(z)=\frac{z+1}{z}M_\mu^{\langle -1\rangle}(z)$$

jest dobrze określona oraz w tym obszarze mamy

$$S_{\mu\boxtimes\nu}(z)=S_\mu(z)S_\nu(z).$$

Funkcja

$$\eta_\mu(z)=\tfrac{M_\mu(z)}{1+M_\mu(z)} \tag{4}$$

okazuje się być równa funkcji generującej kumulant boolowskich, czyli $\eta_\mu(z)=\sum_{n=1}^\infty \beta_n(z)z^n$, mamy zatem następujący fakt.

Stwierdzenie 4.34. *Dla z takich, że wszystkie trzy funkcje są dobrze określone mamy*

$$\eta_{\mu\uplus\nu}(z)=\eta_\mu(z)+\eta_\nu(z).$$

W niniejszym referacie rozważać będziemy jedynie miary o nośniku zwartym, natomiast operacje wolnego splotu addytywnego i multiplikatywnego zostały rozszerzone na wszystkie miary probabilistyczne w pracy [9].

Wyniki z prac [H3] i [H4] dotyczą warunkowych wartości oczekiwanych. Do definicji warunkowej wartości oczekiwanej zakładamy, że algebra zmiennych losowych $\mathcal{A}$ jest algebrą von Neumanna oraz φ jest wiernym, normalnym, śladowym stanem, czyli $(\mathcal{A},\varphi)$ jest śladową W^*–przestrzenią probabilistyczną. Dla $(\mathcal{A},\varphi)$ śladowej W^*–przestrzeni probabilistycznej oraz dla dowolnej podalgebry von Neumanna $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ istnieje wierny, normalny rzut $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B}):\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, taki że $\varphi\circ\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B})=\varphi$. Rzut ten nazywa się warunkową wartością oczekiwaną na podalgebrę $\mathcal{B}$ względem φ. Jeśli $a\in\mathcal{A}$ jest samosprzężona to $\mathbb{E}(a|\mathcal{B})$ jest jednoznacznie wyznaczonym elementem samosprzężonym algebry $\mathcal{B}$. Dla $a\in\mathcal{A}$ przez $\mathbb{E}(\cdot|a)$ będziemy oznaczać rzut na algebrę von Neumanna generowaną przez a oraz $1_\mathcal{A}$.

Ważnym wynikiem dotyczącym warunkowych wartości oczekiwanych dla wolnych zmiennych jest tzw. subordynacja. Nazwa subordynacja bierze się ze związków z teorią funkcji zespolonych, a dokładniej z zagadnieniem kiedy dla $f,g:U\to U$ analitycznych przekształceń z dysku jednostkowego w dysk jednostkowy istnieje funkcja analityczna $\omega:U\to U$ taka że $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$ oraz $f(z)=g(\omega(z))$ dla $z\in U$. Zagadnienie to rozważa się również dla innych obszarów niż dysk jednostkowy. Okazuje się, że analityczna subordynacja pojawia się w naturalny sposób przy badaniu wolnych splotów.

Twierdzenie 4.35 (Biane, [11])**.** *Niech a oraz podalgebra $\mathcal{B}$ będą wolne oraz $b\in\mathcal{B}$ wtedy istnieje jedyna funkcja analityczna ω określona na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, taka że:*

(i)

$$\mathbb{E}\left((z-a-b)^{-1}|\mathcal{B}\right)=(\omega(z)-b)^{-1} \tag{5}$$

(ii) $\overline{\omega(z)}=\omega(\overline{z})$, *dodatkowo dla* $z\in\mathbb{C}^+$ *mamy* $Im(\omega(z))\geq Im(z)$ *oraz* $\frac{\omega(iy)}{iy}\to 1$ *gdy* $y\to+\infty$.

Uwaga 4.36. *Załóżmy, że zmienne a, b w twierdzeniu powyżej mają rozkłady μ, ν odpowiednio, czyli $a+b$ ma rozkład $\mu \boxplus \nu$. Po nałożeniu stanu φ na obie strony równości* (5) *otrzymujemy równość dla transformat Cauchy'ego*

$$G_{\mu\boxplus\nu}(z) = G_\nu(\omega(z)).$$

Powyższa równość razem z punktem (*ii*) *Twierdzenia 4.35 jednoznacznie wyznacza funkcję ω.*

Okazuje się, że dla każdego $z \in \mathbb{C}^+$ istnieje równanie punktu stałego, które spełnia $\omega(z)$. Dodatkowo do punktu stałego można zbiegać iterując to równanie (zob. [3]). Daje to alternatywną metodę znajdowania wolnego splotu lub jego numerycznej aproksymacji.

Podobna subordynacja zachodzi również dla wolnego splotu multiplikatywnego.

Twierdzenie 4.37 (Biane, [11])**.** *Niech a oraz podalgebra $\mathcal{B}$ będą wolne, załóżmy że $b \in \mathcal{B}$ oraz zmienne a, b są dodatnie o rozkładach różnych niż δ_0. Wtedy istnieje jedyna funkcja analityczna η określona na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, taka że:*

(i)

$$\mathbb{E}\left(zb^{1/2}ab^{1/2}(1 - zb^{1/2}ab^{1/2})^{-1}|\mathcal{B}\right) = \eta(z)b(1-\eta(z)b)^{-1} \tag{6}$$

(ii) Dla $z \in \mathbb{C}^+$ mamy $\eta(z) \in \mathbb{C}^+$, $\overline{\eta(z)} = \eta(\overline{z})$ oraz $Arg(\eta(z)) \geq Arg(z)$.

Uwaga 4.38. *Podobnie jak w przypadku addytywnym jeśli a, b mają rozkłady μ, ν odpowiednio po nałożeniu stanu φ na obie strony równania* (6) *otrzymujemy*

$$M_{\mu\boxtimes\nu}(z) = M_\nu(\eta(z)).$$

Multiplikatywna funkcja subordynacji η jest jednoznacznie wyznaczona przez powyższą równość oraz przez punkt (*ii*) *Twierdzenia 4.37.*

Uwaga 4.39. *W pracy [H3] powyższe wyniki rozstały uogólnione na przypadek funkcji od wolnych zmiennych postaci $b + f(b)af(b)^*$, znalezione zostały także rozwinięcia funkcji subordynacji.*

Własności multiplikatywnej funkcji subordynacji odgrywały też istotną rolę w pracy [H1].

Analogiczne transformaty wprowadza się w przypadku $*$-rozkładów. Wprowadzimy najpierw pojęcie szeregów formalnych o nieprzemiennych zmiennych, które grają rolę transformat w przypadku $*$-rozkładów. Szeregi te będą pojawiały się w pracy [H1], której wyniki naturalniej formułuje się w terminach $*$-rozkładów, niż zmiennych losowych o zadanych rozkładach. Przy opisie $*$ rozkładów za pomocą szeregów formalnych będziemy odwoływać się do ich współczynników. Współczynniki te to podobnie jak w przypadku zmiennych samosprzężonych momenty dla szeregu M, wolne kumulanty dla szeregu R, oraz kumulanty boolowskie dla szeregu η. Poniżej wprowadzamy oznaczenia z jakich będziemy korzystać w pracy [H1].

Uwaga 4.40. *(*Szeregi i ich współczynniki.*) (1) Algebra szeregów formalnych w dwóch nieprzemiennych zmiennych z i z^* jest oznaczana przez $\mathbb{C}\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$. Przez $\mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle \subset \mathbb{C}\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$ oznaczać będziemy zbiór szeregów formalnych z zerowym współczynnikiem stałym. Dowolny element $f \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$ jest postaci*

$$f(z, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_n \in \{1,*\}} \alpha_{(\ell_1,\ldots,\ell_n)} z^{\ell_1} \cdots z^{\ell_n} = \sum_{w \in \{1,*\}^n} \alpha_w z^w, \tag{7}$$

gdzie współczynniki α_w *są zespolone oraz dla* $w = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \{1, *\}^n$ *oznaczamy* $z^w = z^{\ell_1} \cdots z^{\ell_n}$.

(2) Dla ustalonego $w \in \{1, *\}^n$, *oznaczamy przez* $Cf_w : \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle \to \mathbb{C}$ *funkcjonał liniowy który przyjmuje wartość równą współczynnikowi* z^w *szeregu* $f \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$. *Tzn. dla* f *danego przez* (7), *mamy* $Cf_w(f) = \alpha_w$, $w \in \{1, *\}^n$ *dla dowolnego* $n \geq 1$.

(3) Dla ustalonego n, *słowa* $w = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \{1, *\}^n$ *oraz partycji* π *zbioru* $\{1, \ldots, n\}$, *definiujemy funkcjonał (nieliniowy, poza przypadkiem gdy* π *składa się z jednego bloku)* $Cf_{w;\pi} : \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle \to \mathbb{C}$, *w następujący sposób. Dla dowolnego bloku* $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ *partycji* π, *gdzie* $1 \leq b_1 < \cdots < b_m \leq n$, *kładziemy*

$$w|B = (\ell_1, \ldots, \ell_n)|B := (\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_m}) \in \{1, *\}^m.$$

Następnie definiujemy

$$Cf_{w;\pi}(f) := \prod_{B \in \pi} Cf_{w|B}(f), \quad f \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle. \tag{8}$$

[Przypuśćmy, że $n = 5$, $\pi = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\}$, *oraz* $w = (\ell_1, \ldots, \ell_5)$. *Wtedy* $Cf_{w;\pi}(f) = Cf_{(\ell_1,\ell_4,\ell_5)}(f) \cdot Cf_{(\ell_2,\ell_3)}(f)$, $f \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$.*]*

Przez $\mathcal{D}_{\text{alg}}(1, *)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich liniowych funkcjonałów $\mathbb{C}\langle X, X^*\rangle \to \mathbb{C}$.

Definicja 4.41. *(*Szereg momentowe*) Ustalmy* $\mu \in \mathcal{D}_{\text{alg}}(1, *)$. *(1) Szereg momentowy* μ *jest zdefiniowany jako* $M_\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w \in \{1,*\}^n} \mu(Z^w) z^w \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$.

(2) Szereg η_μ *jest zdefiniowany jako*

$$\eta_\mu := M_\mu(1 + M_\mu)^{-1} = (1 + M_\mu)^{-1} M_\mu \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle, \tag{9}$$

gdzie wszystkie operacje algebraiczne są wykonywane w algebrze $\mathbb{C}\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$.

(3) Oczywiście z równania (9) wynika, że szereg M_μ *można odzyskać z szeregu* η_μ *jako*

$$M_\mu = \eta_\mu(1 - \eta_\mu)^{-1} = (1 - \eta_\mu)^{-1} \eta_\mu. \tag{10}$$

(4) Prawa strona (10) może być zapisana jako szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_\mu^n$ *(zbieżny w tym sensie, że* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cf}_w(\eta_\mu^n)$ *zawiera tylko skończenie wiele niezerowych wyrazów dla wszystkich* $w \in \{1, *\}^n$ *oraz wszystkich* $n \geq 1$*). Co daje wzór na współczynniki* M_μ *w terminach współczynników* η_μ, *mamy*

$$Cf_w(M_\mu) = \sum_{\pi \in Int(n)} Cf_{w;\pi}(\eta_\mu). \tag{11}$$

Analogicznie

$$Cf_w(\eta_\mu) = \sum_{\pi \in Int(n)} (-1)^{1+|\pi|} Cf_{w;\pi}(M_\mu). \tag{12}$$

Uwaga 4.42. *(1)* Szeregiem R *$*$-rozkładu* $\mu \in \mathcal{D}_{\text{alg}}(1, *)$ *nazywamy szereg formalny* $R_\mu \in \mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$, *którego współczynniki są wyznaczone przez związek z $*$-momentami* μ *zadany wzorem*

$$Cf_w(M_\mu) = \sum_{\pi \in NC(n)} Cf_{w;\pi}(R_\mu), \quad w \in \{1, *\}^n. \tag{13}$$

Można równoważnie zdefiniować szereg R_μ *przez równanie wiążące go z szeregiem* M_μ. *Dokładniej,* R_μ *jest jedynym szeregiem w* $\mathbb{C}_0\langle\langle z, z^*\rangle\rangle$, *który spełnia równanie*

$$R_\mu(z(1 + M_\mu(z, z^*)), z^*(1 + M_\mu(z, z^*)) = M_\mu(z, z^*). \tag{14}$$

4.3.4 Praca [H1]

Zauważmy, że definicja wolnego splotu addytywnego w naturalny sposób prowadzi do pojęcia wolnej nieskończonej podzielności miar probabilistycznych. Powiemy, że miara μ jest $\boxplus$-nieskończenie podzielna (ozn. $\mu \in \mathcal{P}^{\boxplus-ID}$) gdy dla dowolnego $n \geq 1$ istnieje miara μ_n, taka że

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \ldots \boxplus \mu_n}_{n \text{ krotnie}} = \mu_n^{\boxplus n}.$$

Będziemy pisać $\mu^{\boxplus t}$ mając na myśli wolną potęgę splotową rzędu t, czyli miarę której R-transformata jest równa tR_μ. Warto zauważyć, że wolne potęgi splotowe istnieją dla każdej miary i dla wszystkich rzeczywistych $t \geq 1$ (zob. [36]), natomiast dla miar nieskończenie podzielnych istnieją wolne potęgi splotowe rzędu $t < 1$.

W pracy [8] skonstruowana została bijekcja tzw. bijekcja Bercovici-Paty pomiędzy miarami nieskończenie podzielnymi w klasycznym splocie addytywnym $\mathcal{P}^{*-ID}$ i miarami nieskończnie podzielnymi w wolnym splocie addytywnym $\mathcal{P}^{\boxplus-ID}$. Dla miar dla których wszystkie momenty są skończone bijekcja ta może zostać opisana na poziomie kumulant w następujący sposób, dla miary $\mu \in \mathcal{P}^{\boxplus-ID}$ rozważamy jej ciąg wolnych kumulant $\kappa_n(\mu)$, wtedy bijekcja Bercovici-Paty mierze μ przypisuje miarę $\nu \in \mathcal{P}^{*-ID}$, taką że $c_n(\nu) = \kappa_n(\mu)$ dla $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $\big(c_n(\nu)\big)_n$ jest ciągiem klasycznych kumulant miary ν. Miary μ i ν mają te same obszary przyciągania, w szczególności bijekcja Bercovici-Paty przekształca rozkład Wignera na rozkład Gaussowski (w obu przypadkach tylko druga wolna lub klasyczna kumulanta jest niezerowa) oraz rozkład wolny Poissona na rozkład Poissona (wolne, odpowiednio klasyczne kumulanty są stałe).

W pracy [45] zauważono, że wszystkie miary probabilistyczne są nieskończenie podzielne względem addytywnego splotu boolowskiego $\uplus$. W pracy [8] rozważano też bijekcję pomiędzy miarami $\uplus$ nieskończenie podzielnymi (czyli wszystkimi miarami probabilistycznymi), a $\mathcal{P}^{\boxplus-ID}$. Oznaczmy tę bijekcję przez $\mathbb{B}$, stanowi ona punkt wyjściowy pracy [H1]. Ponownie dla miar o wszystkich momentach skończonych $\mathbb{B}$ można opisać na poziomie kumulant. Mamy $\mathbb{B}(\mu) = \nu$ wtedy i tylko wtedy gdy $\beta_n(\mu) = \kappa_n(\nu)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Innymi słowy ciąg kumulant boolowskich dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}$ jest ciągiem wolnych kumulant pewnej miary $\nu \in \mathcal{P}^{\boxplus-ID}$. Definicję bijekcji $\mathbb{B}$ można zapisać za pomocą odpowiednich transformat jako

$$\eta_\mu(z) = R_{\mathbb{B}(\mu)}(z).$$

W pracy [H1] rozważano, po raz pierwszy w literaturze, nieskończoną podzielność dla $*$-rozkładów. Przypomnijmy, że przez $\mathcal{D}_{\mathrm{alg}}(1, *)$ oznaczamy zbiór wszystkich liniowych funkcjonałów $\mathbb{C}\langle X, X^* \rangle \to \mathbb{C}$, natomiast przez $\mathcal{D}_c(1, *)$ oznaczać będziemy zbiór tych $*$-rozkładów które mogą zostać zrealizowane jako rozkład pewnej zmiennej losowej w C^*-przestrzeni probabilistycznej.

Zauważmy, że definicja nieskończonej podzielności przenosi się naturalnie na przypadek $*$–rozkładów. Powiemy, że $\mu \in \mathcal{D}_c^{(\mathrm{inf-div})}(1, *)$ gdy dla dowolnego $n \geq 1$ istnieje $\mu_n \in \mathcal{D}_c(1, *)$, taki że

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \ldots \boxplus \mu_n}_{n \text{ krotnie}}.$$

Innymi słowy dla dowolnego $n \geq 1$ istnieje n wolnych zmiennych losowych $a_1, \ldots, a_n$ o tym samym $*$-rozkładzie, takich że $a_1 + \ldots + a_n$ ma $*$-rozkład μ.

Głównymi osiągnięciami pracy [H1] było: skonstruowanie odpowiednika bijekcji $\mathbb{B}$ dla przypadku $*$-rozkładów, szczegółowy opis $\boxplus$-nieskończenie podzielnych rozkładów R–diagonalnych oraz zbadanie ich własności.

Pierwszym ważnym wynikiem pracy [H1] jest twierdzenie dające boolowską wersję bijekcji Bercovici-Paty (BBP) dla $*$–rozkładów.

Twierdzenie 4.43. (Bijekcja BBP dla $\mathcal{D}_c(1,*)$.) *Istnieje bijekcja*

$$\mathbb{B}_{(1,*)} : \mathcal{D}_c(1,*) \to \mathcal{D}_c^{(\mathrm{inf-div})}(1,*),$$

wyznaczona przez

$$R_{\mathbb{B}_{(1,*)}(\mu)} = \eta_\mu, \quad \mu \in \mathcal{D}_c(1,*). \tag{15}$$

Dokładniej dla dowolnego $\mu \in \mathcal{D}_c(1,*)$ istnieje $*$-rozkład $\nu \in \mathcal{D}_c^{(\mathrm{inf-div})}(1,*)$, taki że $R_\nu = \eta_\mu$, i definiujemy $\mathbb{B}_{(1,*)}(\mu) := \nu$.

Dowód istnienia bijekcji opiera się na wynikach z pracy [5], gdzie rozpatrywano wolną nieskończoną podzielność dla rozkładów k-tek operatorów samosprzężonych $(a_1, \dots, a_k)$.

Kolejnym krokiem po skonstruowaniu była charakteryzacja nieskończenie podzielnych rozkładów R-diagonalnych. Rozkłady R-diagonalne to najlepiej zbadana klasa $*$–rozkładów w wolnej probabilistyce. Rozkłady te zostały zdefiniowane w pracy [37]. Dla operatorów (rozumianych jako nieprzemienne zmienne losowe) o rozkładach R-diagonalnych znaleziono miarę Browna [23, 7] oraz przestrzenie niezmiennicze [43].

Definicja 4.44. *(1) $*$-rozkład $\mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{alg}}(1,*)$ nazywamy R-diagonalnym gdy*

$$R_\mu(z, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (zz^*)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z^*z)^n,$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciągi $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągami wyznaczającymi μ.

Twierdzenie 4.43 daje naturalne narzędzie do scharakteryzowania nieskończenie podzielnych rozkładów R-diagonalnych. Należy rozważyć $*$-rozkłady, których szereg η jest postaci takiej jak szereg R rozkładu R-diagonalnego. Co w naturalny sposób prowadzi do następującej definicji.

Definicja 4.45. *Powiemy, że $*$-rozkład μ jest η-diagonalny, gdy jego szereg η jest postaci*

$$\eta_\mu(z, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (zz^*)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z^*z)^n,$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciągi $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywa się ciągami wyznaczającymi *$*$-rozkład η-diagonalny.*

Charakteryzacja $\boxplus$-nieskończenie podzielnych rozkładów R-diagonalnych wymaga zrozumienia własności rozkładów η-diagonalnych, w szczególności należy zrozumieć jakie ciągi $(\alpha_n)_n$ i $(\beta_n)_n$ mogą być ciągami wyznaczającymi rozkładów η-diagonalnych $\mu \in \mathcal{D}_c(1,*)$. Oczywiście dla η-diagonalnych rozkładów $\mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{alg}}(1,*)$ dowolne ciągi są dozwolone jako ciągi wyznaczające.

Pierwszy wynik, to charakteryzacja rozkładów η-diagonalnych w terminach $*$-momentów.

Definicja 4.46. *(1) Słowo* $w = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \{1, *\}^n$ *nazywamy* mieszająco-naprzemiennym *gdy* $n = 2m$, *dla* $m > 0$ *oraz jeśli* $\ell_{2k-1} \neq \ell_{2k}$, *dla* $k = 1, 2, \ldots, m$.

(2) Można łatwo zauważyć, że dowolne mieszająco-naprzemienne słowo w może być zapisane w jednoznaczny sposób jako konkatenacja słów naprzemiennych takich, że sąsiadujące słowa są różnych typów, gdzie jako typ rozumiemy słowa postaci $(1, *)^n$ *i* $(*, 1)^n$.

[Na przykład, $w = (1, *, 1, *, 1, *, *, 1, *, 1, 1, *, *, 1, *, 1)$ *jest mieszająco-naprzemienne a jego faktoryzacja jest postaci* $w_1 w_2 w_3 w_4$ *z* $w_1 = (1, *)^3$, $w_2 = (*, 1)^2$, $w_3 = (1, *)$, $w_4 = (*, 1)^2$.

Twierdzenie 4.47. *(Twierdzenie 2.8 w [H1]) Niech a będzie nieprzemienną zmienną losową w nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej* $(\mathcal{A}, \varphi)$. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) *zmienna losowa a ma* $*$*-rozkład* η*-diagonalny.*

(b) *Spełnione ą następujące warunki:*

(ηDM1) *Jeśli* $w \in \{1, *\}^n$ *nie jest mieszająco-naprzemienne, to* $\varphi(a^w) = 0$.

(ηDM2) *Jeśli* $w \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \{1, *\}^n$, *które jest mieszająco-naprzemienne i faktoryzacja jak w Definicji 4.46 jest postaci* $w = w_1 \cdots w_p$, *to* $\varphi(a^w) = \varphi(a^{w_1}) \cdots \varphi(a^{w_p})$.

Uwaga 4.48. *Bezpośrednim wnioskiem z powyższego twierdzenia jest fakt, że jeśli* $*$*-rozkład* μ *nieprzemiennej zmiennej losowej a jest* η*-diagonalny, to* aa^* *i* a^*a *są boolowsko niezależne. Jest to odpowiednik własności rozkładów R-diagonalnych, mówiącej że dla b o* $*$*-rozkładzie R-diagonalnym zmienne* bb^* *i* b^*b *są wolne.*

Z powyższym faktem związany jest problem znalezienia części dodatnich zmiennej a o $*$-rozkładzie η-diagonalnym (części dodatnie to zmienne aa^* oraz a^*a). Okazuje się, że są one wyznaczone bezpośrednio przez ciągi wyznaczające rozkład η-diagonalny.

Stwierdzenie 4.49. *Przypuśćmy, że* $\mu \in \mathcal{D}_{\text{alg}}(1, *)$ *jest* η*-diagonalny, niech* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ *będą jego ciągami wyznaczającymi. Wtedy dla nieprzemiennej zmiennej losowej a o rozkładzie* μ, *transformaty boolowskie zmiennych* aa^* *i* a^*a *są postaci*

$$\eta_{aa^*}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \text{ and } \eta_{a^*a}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n.$$

Powyższe stwierdzenie daje ważne wnioski. Ponieważ w oczywisty sposób rozkłady aa^* i a^*a wyznaczają jednoznacznie ciągi $(\alpha_n)_n$ i $(\beta_n)_n$, to rozkład η-diagonalny jest jednoznacznie wyznaczony przez rozkłady części dodatnich. Ponadto każdy z ciągów wyznaczających rozkład η-diagonalny jest ciągiem kumulant boolowskich miary probabilistycznej o nośniku zwartym będącym podzbiorem $\mathbb{R}_+$. Istotnym pytaniem jest, czy można powyższą zależność odwrócić. Dokładniej, dla dowolnej pary miar probabilistycznych σ_1, σ_2 o nośniku zwartym możemy rozważyć odpowiadające im ciągi kumulant boolowskich $(\alpha_n)_n$ oraz $(\beta_n)_n$, chcemy odpowiedzieć na pytanie czy istnieje rozkład η-diagonalny z ciągami wyznaczającymi $(\alpha_n)_n$ oraz $(\beta_n)_n$. Równoważnie chcemy skonstruować nieprzemienną zmienną losową a w pewnej C^*-przestrzeni probabilistycznej, taką że a ma $*$-rozkład η-diagonalny i aa^* oraz a^*a mają odpowiednio rozkłady σ_1 i σ_2. Konstrukcja takiego elementu η-diagonalnego dawałoby parametryzację rozkładów η-diagonalnych należących do $\mathcal{D}_c(1, *)$ za pomocą pary miar probabilistycznych (σ_1, σ_2). W pracy [H1] w Sekcji 5 skonstruowany został model operatorowy dla rozkładu η-diagonalnego dla dowolnej ustalonej pary miar o nośniku zwartym (σ_1, σ_2).

Twierdzenie 4.50. *Oznaczmy przez $\mathcal{P}_c^+$ zbiór miar probabilistycznych o nośniku zwartym na $[0, \infty)$. Istnieje bijekcja*

$$\Phi : \mathcal{P}_c^+ \times \mathcal{P}_c^+ \to \{\mu \in \mathcal{D}_c(1, *) : \mu \text{ jest } \eta\text{-diagonalny}\}$$

taka że: dla zadanych $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}_c^+$, $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ jest jedynym rozkładem η-diagonalnym $*$-rozkładem $\mu \in \mathcal{D}_c(1, *)$ takim, że dla a o rozkładzie μ rozkłady aa^* i a^*a są równe σ_1 i σ_2, odpowiednio.

Uwaga 4.51. *Ustalmy $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}_c^+$. Będziemy korzystać z* symetrycznego pierwiastka *miar σ_1 i σ_2. Są to symetrycznie miary o nośniku zwartym $\widetilde{\sigma}_1$ i $\widetilde{\sigma}_2$ na $\mathbb{R}$ z momentami danymi wzorem*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\widetilde{\sigma}_j(t) = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste} \\ \int_0^\infty t^{n/2} \, d\sigma_j(t), & n \text{ parzyste,} \end{cases}$$

dla $j = 1, 2$. Konstrukcja operatora η-diagonalnego składa się z trzech kroków, i jest omówiona szczegółowo w pracy [H1].
Krok 1. *Konstruujemy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$, operator $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, oraz wektory $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ o następujących własnościach:*

(1a) $||\xi_1|| = ||\xi_2|| = 1$,

(1b) $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$,

(1c) $\langle X^k \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle X^k \xi_2, \xi_1 \rangle = 0$ *for* $k \in \mathbb{N}$,

(1d) $\langle X^{2k-1} \xi_j, \xi_j \rangle = 0$ *i* $\langle X^{2k} \xi_j, \xi_j \rangle = \int_0^\infty t^k \, d\sigma_j(t)$ *dla* $k \in \mathbb{N}$ *i* $j = 1, 2$.

Krok 2. *Definiujemy częściową izometrię rzędu 1 oznaczaną $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ przez $Y(\zeta) = \langle \zeta, \xi_1 \rangle \xi_2$ dla $\zeta \in \mathcal{H}$. Mamy $Y\xi_1 = \xi_2$, $Y^*\zeta = \langle \zeta, \xi_2 \rangle \xi_1$ dla $\zeta \in \mathcal{H}$, oraz*

$$YY^*\zeta = \langle \zeta, \xi_2 \rangle \xi_2, \quad Y^*Y\zeta = \langle \zeta, \xi_1 \rangle \xi_1. \tag{16}$$

Czyli YY^* i Y^*Y są rzutami ortogonalnymi na 1-wymiarowe przestrzenie rozpięte przez ξ_2 i ξ_1 odpowiednio.
Krok 3. *Rozważamy przestrzeń Hilberta $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ oraz wektor jednostkowy $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \in \mathcal{K}$, następnie rozważamy C^*-przestrzeń probabilistyczną $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \varphi_\xi)$, gdzie $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ dla $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Niech $V \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ będzie operatorem "flipu" wyznaczonym przez $V(\zeta \otimes \zeta') = \zeta' \otimes \zeta$, $\zeta, \zeta' \in \mathcal{H}$. Definiujemy $A = V(Y \otimes X)$.*

A jest żądanym operatorem η-diagonalnym w $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \varphi_\xi)$.

Uwaga 4.52. *Twierdzenie 4.50 daje bijekcję*

$$\Phi : \mathcal{P}_c^+ \times \mathcal{P}_c^+ \to \{\mu \in \mathcal{D}_c(1, *) : \mu \text{ jest } \eta\text{-diagonalny}\}. \tag{17}$$

Przekształcenie

$$\Psi := \mathbb{B}_{(1,*)} \circ \Phi : \mathcal{P}_c^+ \times \mathcal{P}_c^+ \to \mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})} \tag{18}$$

jest również bijekcją, gdzie przez $\mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$ oznaczamy rozkłady R-diagonalne należące do $\mathcal{D}_c^{(\mathrm{inf-div})}(1, *)$. Każdy wybór $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}_c^+$ daje $*$-rozkład $\nu = \Psi(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$ oraz każdy $*$-rozkład $\nu \in \mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$ pochodzi od jedynej pary σ_1, σ_2.

Definicja 4.53. *Przez $\mathcal{E}_c^+$ będziemy oznaczać szeregi potęgowe zbieżne w pewnym otoczeniu zera takie, że dla $f \in \mathcal{E}_c^+$ mamy $f = \eta_\sigma$ dla pewnego $\sigma \in \mathcal{P}_c^+$. Gdzie η_σ jest funkcją generującą kumulanty boolowskie zdefiniowaną w* (4).

Konstrukcja bijekcji $\mathcal{B}(1,*)$ oraz operatorów o $*$-rozkładach η-diagonalnych wraz z ich własnościami daje następującą charakteryzację nieskończenie podzielnych (w wolnym splocie) rozkładów R-diagonalnych.

Stwierdzenie 4.54. *Niech $\nu \in \mathcal{D}_c(1,*)$ będzie rozkładem R-diagonalnym, dodatkowo niech $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ beda jego ciągami wyznaczającymi. Zdefiniujmy $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ i $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n$. Wtedy ν jest $\boxplus$-nieskończenie podzielny wtedy i tylko wtedy gdy f i g należą do $\mathcal{E}_c^+$.*

Uwaga 4.55. *Nie wszystkie rozkłady R-diagonalne są nieskończenie podzielne, przykład takiego rozkładu daje element unitarny Haara u. Jest to zmienna taka że $\varphi(u^n) = 0$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Łatwo sprawdzić, że jego ciąg wyznaczający (zob. [39, Lect. 15]) nie jest ciągiem kumulant boolowskich miary probabilistycznej na $[0,+\infty)$.*

Kolejne twierdzenie dostarcza opisu $\boxplus$-nieskończenie podzielnych rozkładów R-diagonalnych w terminach R-transformat.

Twierdzenie 4.56. *(Twierdzenie 6.4 w [H1]) Niech $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}_c^+$. Zdefiniujmy $\nu = \Psi(\sigma_1, \sigma_2)$. Niech zmienna a ma $*$-rozkład ν. Wtedy R-transformaty zmiennych aa^* i a^*a są postaci:*

$$R_{aa^*}(z) = R_{\mathbb{B}(\sigma_1)}\Big(z(1 + M_{\mathbb{B}(\sigma_2)}(z))\Big), \quad R_{a^*a}(z) = R_{\mathbb{B}(\sigma_2)}\Big(z(1 + M_{\mathbb{B}(\sigma_1)}(z))\Big), \tag{19}$$

gdzie $\mathbb{B}(\sigma_1)$ oraz $\mathbb{B}(\sigma_2)$ oznaczają oryginalną (jednowymiarową) boolowską bijekcję Bercovici-Pata.

Reprezentacja R-transformat części dodatnich zmiennej a z Twierdzenia 4.56 pozwala udowodnić nieskończoną podzielność ich rozkładów.

Wniosek 4.57. *Niech $\nu \in \mathcal{D}_c(1,*)$ będzie R-diagonalny niech $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{P}_c^+$ będą rozkładami aa^* i a^*a. Jeśli $\nu \in \mathcal{D}_c^{(\mathrm{inf-div})}(1,*)$, wtedy miary probabilistyczne τ_1 i τ_2 są $\boxplus$-nieskończenie podzielne w $\mathcal{P}_c$.*

Dla dowodu powyższego wniosku należy wykazać, że $R_{\mathbb{B}(\sigma_1)}\Big(z(1 + M_{\mathbb{B}(\sigma_2)}(z))\Big)$ należy do $\mathcal{E}_c^+$, co wynika z definicji jednowymiarowej bijekcji $\mathbb{B}$ oraz własności transformaty momentowej. Dowód opiera się na charakteryzacji funkcji, które należą do klasy $\mathcal{E}_c^+$. Charakteryzacja ta pochodzi z pracy [2].

Przykładem, dla którego można podać dokładniejszą charakteryzację części dodatnich nieskończenie podzielnych $*$-rozkładów R-diagonalnych, są rozkłady spełniające tzw. warunek KMS (zob. [42]).

Definicja 4.58. *Niech $\mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{alg}}(1,*)$ będzie R-diagonalny z ciągami wyznaczającymi $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$, ustalmy dodatnią liczbę rzeczywistą t. Powiemy, że μ spełnia* warunek KMS *z parametrem t gdy*

$$\alpha_n = t\beta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Stwierdzenie 4.59. *Ustalmy $\sigma \in \mathcal{P}_c^+$ oraz liczbę rzeczywistą $t > 0$. Ciągi wyznaczające $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ i $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ $\boxplus$-nieskończenie podzielnego $*$-rozkładu R-diagonalnego postaci $\nu := \Psi(\sigma^{\uplus t}, \sigma) \in \mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$ spełniają*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n = \eta_\sigma(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n = \eta_{\sigma^{\uplus t}}(z) = t\eta_\sigma(z).$$

Taki ν spełnia warunek KMS z parametrem t: $\alpha_n = t\beta_n$, $n \in \mathbb{N}$ (Definicja 4.58).

Niech a będzie zmienną o $*$-rozkładzie ν, oraz $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{P}_c^+$ będą rozkładami aa^* i a^*a. Wtedy

$$\tau_1 = \left(\mathbb{B}(\sigma) \boxtimes \Pi_1\right)^{\boxplus t} \text{ and } \tau_2 = \left(\mathbb{B}(\sigma)^{\boxplus t} \boxtimes \Pi_1\right)^{\boxplus(1/t)}, \tag{21}$$

gdzie Π_1 to rozkład Marchenko-Pastura (rozkład wolny Poissona), czyli miara probabilistyczna o gęstości $f(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x)/x}I_{(0,4)}(x)$.

Uwaga 4.60. *Jednowymiarowa boolowska bijekcja Bercovici-Pata $\mathbb{B}$ jest homomorfizmem ze względu na wolny splot multiplikatywny. Dokładniej, dla dowolnej pary miar $\mu, \nu \in \mathcal{P}^+$ mamy (zob. [5])*

$$\mathbb{B}(\mu \boxtimes \nu) = \mathbb{B}(\mu) \boxtimes \mathbb{B}(\nu).$$

Przypomnijmy, że obrazem $\mathbb{B}$ są miary $\boxplus$-nieskończenie podzielne na $\mathbb{R}$. Powyższa własność sugeruje, że zbiór $\mathcal{P}^{inf-div}(\mathbb{R}_+)$ - miar $\boxplus$ nieskończenie podzielnych zawartych w $\mathbb{R}_+$ jest niezmienniczy ze względu na operację $\boxtimes$. Nie jest to prawdą, ze względu na to, że istnieją miary zawarte w $\mathcal{P}_c^{(\mathrm{inf-div})}(\mathbb{R}_+)$, które są obrazem względem $\mathbb{B}$ miar o nośniku nie zawartym w $\mathbb{R}_+$.

Znany jest fakt, że rozkłady R-diagonalne są niezmiennicze ze względu na wolny splot multiplikatywny, tzn. dla dwóch rozkładów R-diagonalnych μ, ν rozkład $\mu \boxtimes \nu$ jest zawsze R-diagonalny (wystarczy tak naprawdę, żeby jeden z rozkładów był R-diagonalny). Okazuje się, co było dość zaskakujące, że zbiór $\mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$ jest niezmienniczy ze względu na operację $\boxtimes$, gdzie tym razem $\boxtimes$ jest splotem multiplikatywnym $*$-rozkładów.

Twierdzenie 4.61. *Dla dowolnych $\nu, \nu' \in \mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$ mamy $\nu \boxtimes \nu' \in \mathcal{R}_c^{(\mathrm{inf-div})}$.*

Kluczowa do dowodu powyższego twierdzenia jest charakteryzacja funkcji należących do klasy $\mathcal{E}_c^+$ wynikająca z pracy [2].

Stwierdzenie 4.62. *Szereg $f \in \mathbb{C}[[z]]$ należy do zbioru $\mathcal{E}_c^+$ wtedy i tylko wtedy gdy spełnia następujące trzy warunki:*

(i) *f ma współczynniki rzeczywiste*

(ii) *f ma dodatni promień zbieżności;*

(iii) *f może być przedłużona do funkcji analitycznej (ciągle oznaczanej przez f) z $\mathbb{C}^+$ do $\overline{\mathbb{C}^+}$ takiej, że $f(0) = 0$ oraz $\mathrm{Arg}(z) \le \mathrm{Arg}(f(z))$ dla $z \in \mathbb{C}^+$.*

Zauważmy, że klasa $\mathcal{E}_c^+$ jest zamknięta ze względu na składanie funkcji. Dowód Twierdzenia 4.61 opiera się na reprezentacji funkcji generujących ciągi wyznaczające $\nu \boxtimes \nu'$ jako złożenie trzech funkcji należących do $\mathcal{E}_c^+$. Kluczowa obserwacja polega na wykazaniu, że taka reprezentacja jest możliwa przy wykorzystaniu muliplikatywnej funkcji subordynacji (dla splotu multipliktywnego miar na $\mathbb{R}_+$), o której wiemy z Twierdzenia 4.37, że należy do $\mathcal{E}_c^+$.

4.3.5 Praca [H2]

Zanim opiszemy wyniki z pracy [H2] wyjaśnimy w jaki sposób wyniki z pracy [H1], w szczególności Twierdzenie 4.61 doprowadziło do powstania pracy [H2]. W Uwadze 4.60 przywołana została własność bijekcji $\mathbb{B}$ mówiąca, że dla miar $\mu \in \mathcal{P}^+$

$$\mathbb{B}(\mu \boxtimes \nu) = \mathbb{B}(\mu) \boxtimes \mathbb{B}(\nu).$$

Dowód powyższej równości opiera się na obserwacji, że dla wolnych zmiennych a, b wzory na wolne i boolowskie kumulanty ab mają dokładnie taką samą strukturę. Tak jak podaliśmy wcześniej w Uwadze 4.27 mamy

$$\kappa_n(ab) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a)\kappa_{K(\pi)}(b)$$

jednocześnie w pracy [5] udowodniono, że dla kumulant boolowskich mamy (o zmiennych a i b nadal zakładamy, że są wolne!)

$$\beta_n(ab) = \sum_{\pi \in NC(n)} \beta_\pi(a)\beta_{K(\pi)}(b). \tag{22}$$

Powyższy wynik jest zaskakujący, funkcjonały $(\kappa_n)_n$ oraz $(\beta_n)_n$ są zdecydowanie różne, jedne są związane z kratą nieprzecinających partycji, drugie z kratą partycji interwałowych.

Możliwym uogólnieniem Twierdzenia 4.61, jest hipoteza mówiąca, że dla $*$-rozkładów μ, ν zachodzi

$$\mathbb{B}_{(1,*)}(\mu \boxtimes \nu) = \mathbb{B}_{(1,*)}(\mu) \boxtimes \mathbb{B}_{(1,*)}(\nu).$$

Dawałoby to uogólnienie Twierdzenia 4.61 na wszystkie nieskończenie podzielne $*$-rozkłady. Naturalną drogą dowodu powyższej hipotezy jest sprawdzenie czy $*$-kumulanty wolne i boolowskie ab, czyli innymi słowy łączne kumulanty wolne i boolowskie zmiennych ab i b^*a^* mają te same rozwinięcia w terminach $*$-kumulant brzegowych. Porównanie wzorów dla $\kappa_3(ab, ab, b^*a^*)$ oraz $\beta_3(ab, ab, b^*a^*)$ weryfikuje negatywnie powyższą hipotezę, natomiast daje ciekawe wnioski.

Problem kombinatorycznego opisu wolnych $*$-kumulant iloczynu wolnych zmiennych losowych jest znany i funkcjonuje jako trudny problem kombinatoryczny. Tym samym nie był znany dobry opis $*$-rozkładu ab nawet w sytuacji gdy a, b są samosprzężone. Pomimo, że wyżej opisana hipoteza okazuje się fałszywa, to bezpośredni rachunek przedstawiający $\beta_3(ab, ab, b^*a^*)$ w terminach $*$-kumulant boolowskich a i b, oraz dla kilku innych przykładów niskiego rzędu dał nadzieję na to, że $*$-rozkład ab może zostać opisany w terminach kumulant boolowskich. Jest to główna obserwacja pochodząca z pracy [H2] oraz jeden z głównych wyników w niej zawartych. Fakt, że do pracy z $*$-rozkładem iloczynów wolnych zmiennych losowych kumulanty boolowskie są narzędziem wygodniejszym i efektywniejszym niż kumulanty wolne był niespodziewany.

Jak pisaliśmy wcześniej zachodzi wzór:

$$\kappa_n(ab, \ldots, ab) = \sum_{\pi \in NC(n)} \prod_{U \in \pi} \kappa_{|U|}(a, \ldots, a) \cdot \prod_{V \in K(\pi)} \kappa_{|V|}(b, \ldots, b), \tag{23}$$

dowód powyższego wzoru opiera się na trzech krokach:

$$\begin{cases} \text{Krok 1.} & \text{Po lewej stronie (23), wykorzystujemy wzór} \\ & \quad \text{na wolne kumulanty które jako argument} \\ & \quad \text{przyjmują iloczyny (dający sumę po } NC(2n)\text{).} \\ \text{Krok 2.} & \text{Wykorzystujemy wolność zmiennych } a \text{ i } b\text{, przez} \\ & \quad \text{co łączne partycje łączące } a \text{ i } b \text{ znikają.} \\ \text{Krok 3.} & \text{Przeprowadzamy kombinatoryczną analizę partycji} \\ & \quad \text{w } NC(2n) \text{ które nie zostały usunięte w Kroku 2.} \end{cases} \tag{24}$$

Naturalnym podejściem do znajdowania $*$-rozkładu ab jest analogiczna strategia składająca się z trzech kroków jak powyżej. Przy czym dla $*$-rozkładów wykorzystywać będziemy kumulanty boolowskie.

Do pierwszego kroku potrzebny jest łatwy fakt który daje wzór na boolowskie kumulanty z iloczynami w argumentach.

Stwierdzenie 4.63. *Rozważmy kumulantę boolowską postaci $\beta_m(x_1, \ldots, x_m)$ gdzie każda ze zmiennych $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{A}$ pisze się jako iloczyn:*

$$x_1 = a_1 \cdots a_{i(1)}, x_2 = a_{i(1)+1} \cdots a_{i(2)}, \ldots, x_m = a_{i(m-1)+1} \cdots a_{i(m)},$$

gdzie $1 \leq i(1) < i(2) < \cdots < i(m) =: n$ są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Wtedy mamy

$$\beta_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{\pi \in Int(n) \text{ takich} \\ \text{że } \pi \vee \sigma = 1_n}} \beta_\pi(a_1, \ldots, a_n), \tag{25}$$

dla

$$\sigma := \{ \{1, \ldots, i(1)\}, \{i(1)+1, \ldots, i(2)\}, \ldots, \{i(m-1)+1, \ldots, i(m)\} \} \in Int(n). \tag{26}$$

Analogiczny do wzoru (25) wzór dla wolnych kumulant daje sumę po partycjach nieprzecinających spełniających ten sam warunek $\pi \vee \sigma = 1_n$. Dowody obydwu wzorów są analogiczne, opierają się na własnościach funkcji Möbiusa na kracie. Należy zwrócić uwagę, że suma po partycjach interwałowych ma dużo łatwiejszą strukturę kombinatoryczną niż suma po wszystkich partycjach nieprzecinających. Pomimo tego, że w Kroku 2 wolność w terminach kumulant boolowskich (sformułowana poniżej) musi wyrażać się w bardziej skomplikowany sposób niż w terminach kumulant wolnych, to udaje się zrozumieć kombinatoryczną strukturę ostatecznego rezultatu w terminach kumulant boolowskich.

Następnie przechodzimy do opisu wolności w terminach kumulant boolowskich, jest to jeden z wyników pochodzących z pracy [H2], charakteryzacja ta (przy użyciu drzew zamiast partycji) została niezależnie udowodniona w pracy [25]. Głównym obiektem kombinatorycznym są kolorowane nieprzecinające partycje ze strukturalną własnością VNRP (*vertical-no-repeat property*)

Uwaga 4.64. *Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz $\pi \in NC(n)$.*

(1) Dla bloków V, W partycji π będziemy pisać "$V \overset{\text{nest}}{\leq} W$" gdy V jest zawarty w W, czyli zachodzą nierówności

$$\min(W) \leq \min(V) \text{ oraz } \max(W) \geq \max(V).$$

(2) Blok $W \in \pi$ który jest maksymalny ze względu na $\overset{\text{nest}}{\leq}$ będziemy nazywać blokiem zewnętrznym. *Blok $V \in \pi$ który nie jest zewnętrzny nazywać będziemy* blokiem wewnętrznym.

Definicja 4.65. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in NC(n)$ oraz V będzie blokiem π. Łatwo widzieć, że zbiór $\{W \in \pi \mid W \overset{\text{nest}}{\geq} V\}$ jest liniowo uporządkowany przez $\overset{\text{nest}}{\leq}$. Czyli możemy napisać*

$$\{W \in \pi \mid W \overset{\text{nest}}{\geq} V\} = \{V_1, \ldots, V_k\} \tag{27}$$

gdzie $k \geq 1$ oraz $V_1 \overset{\text{nest}}{<} V_2 \overset{\text{nest}}{<} \cdots \overset{\text{nest}}{<} V_k$. Zauważmy, że w (27) mamy $V_1 = V$ oraz V_k jest blokiem zewnętrznym. Powiemy, że V ma głębokość $k-1$ w π i będziemy oznaczać

$$\mathrm{depth}_\pi(V) := k - 1,$$

gdzie k pochodzi z (27). Jeśli $k \geq 2$ (co oznacza, że V jest blokiem wewnętrznym), to V_2 w (27) nazywamy rodzicem *V, oraz oznaczamy* $\mathrm{Parent}_\pi(V)$.

Dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ będziemy pisać "$\mathrm{depth}_\pi(i)$" mając na myśli głębokość bloku π zawierającego i.

Definicja 4.66. *(1) Ustalmy dwie liczby naturalne m i s, oraz funkcję $c : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, s\}$. (funkcja c reprezentuje "kolorowanie $\{1, \ldots, m\}$ na s kolorów".) Przez $NC(m; c)$ oznaczamy podzbiór $NC(m)$ zdefiniowany przez*

$$NC(m; c) := \{\sigma \in NC(m) \mid \ c \text{ jest stała na każdym bloku } \sigma\}.$$

Dla $\sigma \in NC(m; c)$ oraz $A \in \sigma$, przez $c(A)$ oznaczamy wspólną wartość $c(a) \in \{1, \ldots, s\}$ przyjmowaną przez c dla $a \in A$. Zauważmy, że $NC(m; c)$ posiada dwa częściowe porządki odziedziczone z $NC(n)$ porządek "$\leq$" (odwrotnego rozdrobnienia) oraz "$\ll$".

*(2) Partycja $\sigma \in NC(m; c)$ posiada własność $VNRP$ (*vertical no-repeat property*) względem kolorowania c gdy dla dowolnego $A \in \sigma$, mamy*

$$c(\,\mathrm{Parent}_\sigma(A)\,) \neq c(A).$$

Do charakteryzacji wolności w terminach boolowskich kumulant kluczowa jest charakteryzacja partycji z własnością VNRP, mówiąca że dla ustalonego kolorowania c partycje w $NC(n, c)$ posiadające własność VNRP są elementami maksymalnymi względem porządku $\ll$.

Twierdzenie 4.67. *(Twierdzenie 1.1 w [H2])*
Niech $m \in \mathbb{N}$, oraz $c : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, s\}$ będzie kolorowaniem.

Dla każdej partycji $\sigma \in NC(m; c)$ istnieje jedyna partycja $\tau \in NC(m; c)$, taka że $\sigma \ll \tau$ oraz τ posiada własność VNRP.

Twierdzenie 4.67 pozwala w łatwy sposób udowodnić charakteryzację wolności w terminach kumulant boolowskich.

Twierdzenie 4.68. *(Twierdzenie 1.2 w [H2]) Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną oraz niech $(\beta_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C})_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem kumulant boolowskich. Niech $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}$ będą podalgebrami z jedynką. Następujące warunki są równoważne.*

(1) $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$ są wolne względem φ.

(2) Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, każdego kolorowania $c : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, s\}$, oraz wszystkich $a_1 \in \mathcal{A}_{c(1)}, \dots, a_n \in \mathcal{A}_{c(n)}$, mamy

$$\beta_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n;c) \text{ z jednym} \\ \text{blokiem zewnętrznym} \\ \text{oraz z własnością VNRP}}} \beta_\pi(a_1, \dots, a_n). \tag{28}$$

W powyższym twierdzeniu istotna jest implikacja (1) $\implies$ (2), implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że znajomość łącznych kumulant boolowskich daje pełną informację o rozkładzie łącznym. Poniżej przedstawimy w jaki sposób z Twierdzenia 4.67 otrzymuje się łatwo dowód Twierdzenia 4.68.

$$\begin{aligned} \beta_n(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{\pi \in NC(n),\ \pi \ll 1_n} \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{\pi \in NC(n,c),\ \pi \ll 1_n} \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

w pierwszej równości wykorzystaliśmy równość (2), druga równość wynika z charakteryzacji wolności w terminach wolnych kumulant oraz wolności podalgebr $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$.

Następnie wykorzystujemy Twierdzenie 4.67 i grupujemy partycje "$\pi \in NC(n,c),\ \pi \ll 1_n$" względem partycji maksymalnych, czyli dla każdej π znajdujemy jedyną partycję ρ taką, że $\rho \in NC(n;c)$, i $\pi \ll \rho$ oraz ρ ma własnosć VNRP. Otrzymujemy

$$\sum_{\substack{\rho \in NC(n,c),\ \rho \ll 1_n, \\ \rho \text{ ma } VNRP}} \Big(\sum_{\pi \ll \rho} \kappa_\pi(a_1, \dots, a_n) \Big).$$

Następnie, ponownie korzystając ze wzoru na boolowskie kumulanty w terminach wolnych kumulant, zauważamy, że wewnętrzna suma daje $\beta_\rho(a_1, \dots, a_n)$. Ostatecznie otrzymujemy postulowany wzór na $\beta_n(a_1, \dots, a_n)$.

Stwierdzenie 4.63 oraz Twierdzenie 4.68 są narzędziami niezbędnymi do przeprowadzenia analizy boolowskich kumulant łącznych ab i $(ab)^*$ dla a, b wolnych. Analiza w Kroku 3 prowadzi do zdefiniowania następujących struktur kombinatorycznych.

Definicja 4.69. *Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz $\sigma \in NC(2n)$, zdefiniujmy zbiór* $\mathrm{OuterMax}(\sigma) := \{\max(W) \mid W \text{ jest blokiem zewnętrznym } \sigma\}$. *Powiemy, że σ jest* ac-friendly *(*anti-commutator-friendly*, ozn. $\sigma \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}$) gdy spełnia następujące warunki.*

(AC-Friendly1) $\mathrm{OuterMax}(\sigma) \subseteq \{1, 3, \dots, 2n-1\} \cup \{2n\}$.

(AC-Friendly2) Dla wszyskich $j \in \{1, 3, \dots, 2n-1\} \setminus \mathrm{OuterMax}(\sigma)$, mamy $\mathrm{depth}_\sigma(j) \neq \mathrm{depth}_\sigma(j+1)$.

Powyższy zbiór partycji stanowi szkielet kombinatorycznej sumy związanej z rozwinięciem $\beta_n\big((ab)^{\varepsilon(1)}, \dots, (ab)^{\varepsilon(n)} \big)$, kolejny krok to odpowiednie pokolorowanie partycji. Poniższa definicja mówi, że interesujące nas kolorowania są ustalone, po ustaleniu kolorowania bloku zawierającego 1.

Definicja 4.70. *Ustalmy $m \in \mathbb{N}$ oraz $\sigma \in NC(m)$.* Kanonicznym naprzemiennym kolorowaniem *partycji σ nazywamy kolorowanie $\mathrm{calt}_\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, 2\}$, którego wartości na partycji σ są wyznaczone przez warunki:*

(C-Alt1) Oznaczając przez W_1 blok σ zawierający numer 1, mamy $\mathrm{calt}_\sigma(W_1) = 1$.

(C-Alt2) Jeśli W i W' są "sąsiednimi" blokami zewnętrznymi σ, czyli $\min(W') = 1 + \max(W)$, wtedy $\mathrm{calt}_\sigma(W') \neq \mathrm{calt}_\sigma(W)$.

(C-Alt3) Jeśli V jest blokiem wewnętrznym σ, wtedy $\mathrm{calt}_\sigma(V) \neq \mathrm{calt}_\sigma(\,\mathrm{Parent}_\sigma(V)\,)$.

Zauważmy, że charakteryzacja wolności w terminach kumulant boolowskich daje dla wolnych zmiennych a, b rozwinięcie kumulant łącznych a i b w kumulanty pojedynczych zmiennych. W poniższej definicji wykorzystujemy ten łatwy fakt to tego aby z kolorowania rozpoznać, czy dana zmienna a lub b pochodzi z pary ab czy z pary $(ab)^* = ba$.

Definicja 4.71. *Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, oraz $\pi \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n)$, oraz rozważmy kanoniczne naprzemienne kolorowanie π $\mathrm{calt}_\pi : \{1, \ldots, 2n\} \to \{1, 2\}$.*
Na podstawie wartości $\mathrm{calt}_\pi(1), \mathrm{calt}_\pi(3), \ldots, \mathrm{calt}_\pi(2n-1)$ definiujemy ciąg $\varepsilon \in \{1, *\}^n$, jako:

$$\varepsilon(i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \textit{gdy } \mathrm{calt}_\pi(2i-1) = 1, \\ *, & \textit{gdy } \mathrm{calt}_\pi(2i-1) = 2 \end{array} \right\}, 1 \leq i \leq n. \tag{29}$$

Taki ciąg $\varepsilon \in \{1, *\}^n$ będziemy oznaczać jako $\mathrm{oddtuple}(\pi)$.

Poniższe twierdzenie daje kombinatoryczny opis $*$-rozkładu zmiennej ab dla zmiennych a, b wolnych, samosprzężonych.

Twierdzenie 4.72. *(Theorem 1.7 w [H2]) Rozważmy samosprzężone, wolne zmienne $a, b \in \mathcal{A}$ o kumulantach boolowskich $(\beta_n(a))_{n=1}^\infty$ i $(\beta_n(b))_{n=1}^\infty$.*

(1) Dla $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon = (\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(n)) \in \{1, *\}^n$ takich, że $\varepsilon(1) = 1$, mamy

$$\beta_n\big(\,(ab)^{\varepsilon(1)}, \ldots, (ab)^{\varepsilon(n)}\,\big) = \tag{30}$$
$$\sum_{\substack{\sigma \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n), \\ \textit{takich że} \\ \mathrm{oddtuple}(\sigma) = \varepsilon}} \Big(\prod_{\substack{U \in \sigma,\ z \\ \mathrm{calt}_\sigma(U) = 1}} \beta_{|U|}(a) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{V \in \sigma,\ z \\ \mathrm{calt}_\sigma(V) = 2}} \beta_{|V|}(b) \Big).$$

(2) Dla $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon = (\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(n)) \in \{1, *\}^n$ takich, że $\varepsilon(1) = *$, rozważmy $\varepsilon' \in \{1, *\}^n$, wyznaczony przez $\varepsilon'(i) \neq \varepsilon(i)$, dla $1 \leq i \leq n$. Mamy

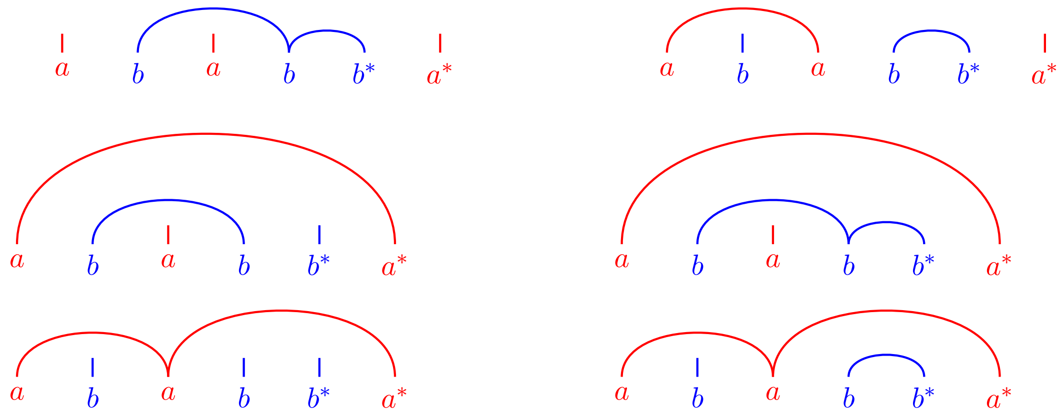
$$\beta_n\big(\,(ab)^{\varepsilon(1)}, \ldots, (ab)^{\varepsilon(n)}\,\big) = \tag{31}$$
$$\sum_{\substack{\sigma \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n), \\ \textit{takich że} \\ \mathrm{oddtuple}(\sigma) = \varepsilon'}} \Big(\prod_{\substack{U \in \sigma, \\ \mathrm{calt}_\sigma(U) = 1}} \beta_{|U|}(b) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{V \in \sigma, \\ \mathrm{calt}_\sigma(V) = 2}} \beta_{|V|}(a) \Big).$$

W powyższym twierdzeniu mogliśmy zakładać, że a, b nie są samosprzężone, w takiej sytuacji również można sformułować twierdzenie analogiczne do powyższego. Nie podajemy tu takiego twierdzenia, natomiast wszystkie kombinatoryczne struktury i sama forma wzoru są dokładnie takie same.

Przykład 4.73. *Rozważmy kumulantę $\beta_3(ab, ab, b^*a^*)$, gdzie piszemy b^* i a^* dla rozróżnienia pomiędzy a, b pochodzącymi od ab i ba. Otrzymujemy*

$$\begin{aligned}\beta_3(ab, ab, b^*a^*) = {} & \beta_1(a)\beta_1(a)\beta_1(a^*) \cdot \beta_3(b, b, b^*) + \beta_2(a, a)\beta_1(a^*) \cdot \beta_1(b)\beta_2(b, b^*) \\ & + \beta_2(a, a^*)\beta_1(a) \cdot \beta_2(b, b)\beta_1(b^*) + \beta_2(a, a^*)\beta_1(a)\beta_3(b, b, b^*) \\ & \beta_3(a, a, a^*) \cdot \beta_1(b)\beta_1(b)\beta_1(b^*) + \beta_3(a, a, a^*)\beta_1(b)\beta_2(b, b^*).\end{aligned} \tag{32}$$

Powyższa suma odpowiada sumie po poniższym zbiorze kolorowanych partycji $NC(6)$.

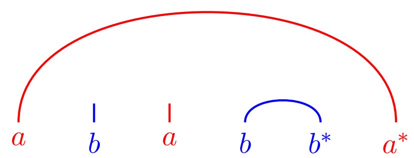


Rysunek 1. Podzbiór $NC(6)$ opisujący sumę w (32).

Podobny rachunek dla $\kappa_3(ab, ab, b^*a^*)$ daje sumę składającą się z 7 składników, 6 z nich ma strukturę dokładnie taką jak (32), natomiast siódmy wyraz równy

$$\kappa_2(a, a^*)\kappa_1(a)\kappa_1(b)\kappa_2(b, b^*),$$

odpowiada partycji nieposiadającej własności VNRP przedstawionej na Rysunku 2. Jest to przykład tego, że wolne $*$-kumulanty zmiennej ab mają trudniejszą kombinatoryczną strukturę.



Rysunek 2.

Uwaga 4.74. *Z kombinatorycznego punktu widzenia Twierdzenie 4.72 daje uogólnienie dopełnienia Krewerasa. Przypomnijmy, że przypadku $\varepsilon(1) = \ldots = \varepsilon(n) = 1$ ze wzoru (22) otrzymujemy, że interesująca nas kumulanta boolowska jest równa*

$$\beta_n(ab, \ldots, ab) = \sum_{\pi \in NC(n)} \beta_\pi(a)\beta_{K(\pi)}(b).$$

Można sprawdzić, że w przypadku $\varepsilon(1) = \ldots = \varepsilon(n) = 1$ warunki zadane w Twierdzeniu 4.72 rzeczywiście zadają strukturę jak w powyższym wzorze.

Rozumiejąc dopełnienie Krewerasa jako pokolorowaną partycję spełniającą odpowiedni warunek maksymalności, gdzie kolorowanie jest wyznaczone przez parzystości danej liczby, z Twierdzenie 4.72 otrzymujemy uogólnienie dopełnienie Krewerasa na kolorowania nie związane z parzystością.

Jak widać na przykładzie partycji na Rysunku 1, dla takiego uogólnionego „dopełnienia Krewerasa" tracimy interpretację jako przekształcenia z $NC(n)$ w $NC(n)$, istotnie, tej samej partycji (czerwonej) mogą odpowiadać dwie różne partycje (niebieskie).

Sumując w Twierdzeniu 4.72 po wszystkich możliwych ciągach $\varepsilon \in \{1, *\}^n$, oraz korzystając z wieloliniowości kumulant boolowskich otrzymujemy kombinatoryczny opis Boolowskich kumulant dla antykomutatora a, b. Kombinatoryczny opis rozkładu wolnego antykomutatora był wcześniej znany tylko w dużo łatwiejszym przypadku, gdy a i b mają symetryczne rozkłady, w tym przypadku jest równy rozkładowi komutatora $i(ab - ba)$ i został znaleziony w pracy [38]. Znany był również układ równań dający możliwość znalezienia transformaty Cauchy'ego antykomutatora (zob. [47]), wyprowadzony za pomocą metod analitycznych i aproksymacji za pomocą macierzy losowych. Możliwość numerycznego wyznaczenia gęstości wielomianów w wolnych zmiennych dają metody linearyzacji [24].

Twierdzenie 4.75. *(Theorem 1.8 w [H2]) Niech a, b będą wolne, samosprzężone. Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, n-ta kumulanta boolowska $ab + ba$ jest postaci*

$$\beta_n(ab+ba) = \sum_{\sigma \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n)} \Big(\prod_{\substack{U \in \sigma, \\ \mathrm{calt}_\sigma(U)=1}} \beta_{|U|}(a) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{V \in \sigma, \\ \mathrm{calt}_\sigma(V)=2}} \beta_{|V|}(b) \Big)$$

$$+ \sum_{\sigma \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n)} \Big(\prod_{\substack{U \in \sigma, \text{ with} \\ \mathrm{calt}_\sigma(U)=1}} \beta_{|U|}(b) \Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{V \in \sigma, \text{ with} \\ \mathrm{calt}_\sigma(V)=2}} \beta_{|V|}(a) \Big). \tag{33}$$

Uwaga 4.76. *Gdy założymy, że a i b mają te same rozkłady wtedy wzór (33) znacząco się upraszcza. Oznaczając przez $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ wspólny ciąg boolowskich kumulant a i b, otrzymujemy, że n-ta boolowska kumulanta $ab + ba$ jest równa*

$$\beta_n(ab+ba) = 2 \cdot \sum_{\sigma \in NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n)} \prod_{V \in \sigma} \lambda_{|V|}. \tag{34}$$

W szczególności biorąc za wspólny rozkład miarę $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_2)$ mamy $\lambda_n = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy boolowskie kumulanty antykomutatora dają podwojone liczności zbiorów $NC_{\mathrm{ac-friendly}}(2n)$.

Zauważmy że kolorowane nieprzecinające partycje pojawiające się w Twierdzeniu 4.75 mają bardzo regularną strukturę kombinatoryczną. Mianowicie po ustaleniu koloru bloku zawierającego pierwszy element kolory pozostałych bloków są ustalone:

(i) bloki zewnętrzne kolorujemy naprzemiennie, tak żeby sąsiadujące bloki zewnętrzne miały różne kolory,

(ii) następnie kolorujemy bloki wewnętrzne w jedyny sposób, tak żeby partycja posiadała własność VNRP.

Powyższa regularna struktura pozwala na wyprowadzenie układu równań, które spełnia funkcja generująca ciągu $\big(\beta_n(ab+ba)\big)_{n\geq 1}$, czyli innymi słowy transformata $\eta_{ab+ba}(z)$. Poniżej przedstawiamy ten układ równań tylko w prostszym przypadku gdy a i b mają ten sam rozkład. Pełne sformułowanie wraz z dowodem dostępne jest w pracy [H2].

Zdefiniujmy macierz, której każdy wyraz jest pewnym szeregiem potęgowym

$$F_a = \begin{bmatrix} f_{a,a} & f_{a,a^*} \\ f_{a^*,a} & f_{a^*,a^*} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Twierdzenie 4.77. *Niech $(\mathcal{A},\varphi)$ będzie $*$-przestrzenią probabilistyczną, niech a,b będą samosprzężonymi elementami $\mathcal{A}$ takimi, żę a i b są wolne oraz a,b mają ten sam rozkład.*

(1) Macierz F_a z równania (35) spełnia równanie

$$F_a H_a = \eta_a(zH_a), \tag{36}$$

gdzie η_a jest η-transformatą oraz

$$H_a := \begin{bmatrix} f_{a^*,a^*}(1-f_{a,a^*})^{-1} & f_{a^*,a} + f_{a^*,a^*}(1-f_{a,a^*})^{-1} f_{a,a} \\ (1-f_{a,a^*})^{-1} & (1-f_{a,a^*})^{-1} f_{a,a} \end{bmatrix}.$$

(2) η-transformata $ab+ba$ można otrzymać z wyrazów macierzy F_a jako

$$\eta_{ab+ba}(z^2) = 2\left(f_{a,a^*}(z) + \frac{f_{a,a}(z) f_{a^*,a^*}(z)}{1-f_{a^*,a}(z)}\right). \tag{37}$$

Powyższe twierdzenie zachodzi dla szeregów formalnych, natomiast zakładając że a,b są ograniczonymi zmiennymi losowymi z pewnej C^*-przestrzeni probabilistycznej szeregi te są zbieżne w pewnym otoczeniu zera i zadają funkcje analityczne. W takim przypadku możemy rozwiązywać powyższy układ równań i znajdować rozkład antykomutatora poprzez wyznaczenie odpowiednich transformat.

Przykład 4.78. *Niech a,b będą wolne i mają ten sam rozkład $\frac{1}{2}(\delta_0+\delta_2)$. Wtedy rozkład $ab+ba$ jest absolutnie ciągły, o nośniku równym $[-1,8]$ oraz o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{-1-\sqrt{\frac{x-8}{x}}-\frac{4}{x}}}{8-3\sqrt{(x-8)x}-x} & \text{dla } x \in (-1,0), \\[2em] \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{x(4\sqrt{1+x}-x-4)}+3\sqrt{(8-x)(4\sqrt{1+x}+x+4)}-8\sqrt{\frac{4\sqrt{1+x}-4-x}{x}}}{8(8-x)(1+x)} & \text{dla } x \in (0,8). \end{cases}$$

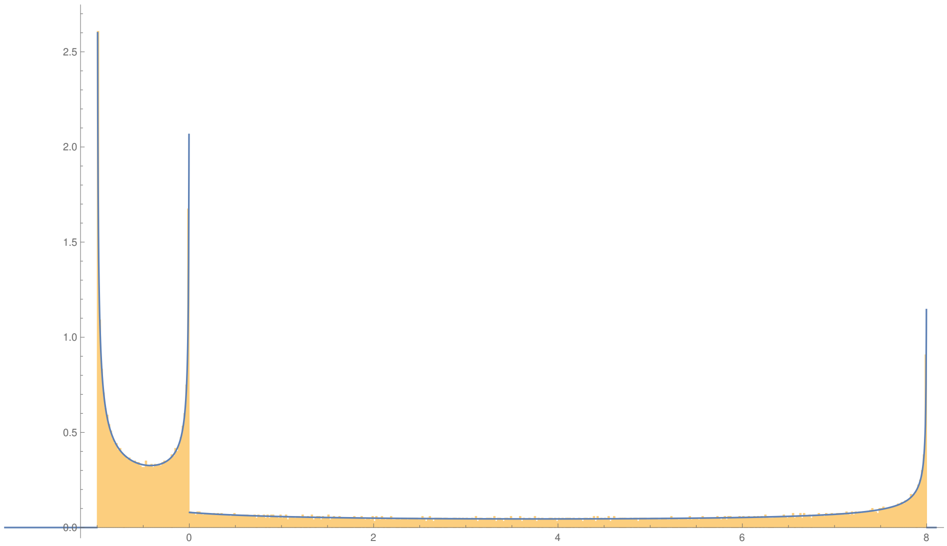
Dodatkowo w pewnym otoczeniu zera

$$\eta_{ab+ba}(z) = 1 - \sqrt{(1-8z)\frac{1-2z-\sqrt{1-8z}}{2z}}. \tag{38}$$

Co w świetle Uwagi 4.76 daje wzór na funkcję generującą ciągu liczności zbiorów $NC_{\text{ac-friendly}}(2n)$, dokładniej mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, NC_{\text{ac-friendly}}(2n)\,| z^n = \frac{1}{2} - \sqrt{(1-8z)\frac{1-2z-\sqrt{1-8z}}{8z}}.$$

Poniżej przedstawiamy wykres gęstości rozkładu $ab + ba$ (na niebiesko) wraz z histogramem wartości własnych dla aproksymacji macierzowej (na żółto).



Rysunek 3. Gęstość rozkładu $ab + ba$ dla a, b wolnych o rozkładach $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2$, wraz z histogramem wartości własnych aproksymacji macierzowej.

4.3.6 Praca [H3]

Głównym osiągnięciem pracy [H3] było zrozumienie głębokich związków pomiędzy boolowskimi kumulantami oraz warunkowymi wartościami oczekiwanymi funkcji od wolnych zmiennych. Pozwoliło to na znalezienie, nieznanych wcześniej, związków pomiędzy funkcjami subordynacji a kumulantami boolowskimi. Ponadto lepsze zrozumienie natury addytywnej i multiplikatywnej funkcji subordynacji pozwoliło na znalezienie metody na wyznaczenie rozkładu $b + f(b)af(b)^*$ dla wolnych, samosprzężonych zmiennych a, b oraz funkcji borelowskiej f.

Podstawą pracy [H3] jest obserwacja, że charakteryzacja wolności z pracy [H2] daje następujące rozwinięcie dla momentów wolnych zmiennych losowych.

Lemat 4.79. *(Lemma 3.1 w [H3]) Niech $\{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, \ldots, b_n\}$ będą wolnymi rodzinami zmiennych losowych w $(\mathcal{A}, \varphi)$, wtedy*

$$\begin{aligned}\varphi\left(a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{0<i_1<\ldots<i_k<n}\varphi\left(b_{i_1}\ldots b_{i_k}b_n\right)\prod_{j=0}^{k}\beta_{2(i_{j+1}-i_j)-1}(a_{i_j+1}, b_{i_j+1}, \ldots, a_{i_{j+1}}), \end{aligned} \tag{39}$$

gdzie w powyższej sumie dla wszystkich ustalonych ciągów $0 < i_1 < \ldots < i_k < n$ mamy zawsze $i_0 = 0$ oraz $i_{k+1} = n$.

W pracy [H3] zostały zaprezentowane dwa dowody powyższego lematu, jeden opierający się na wynikach z [H2]. Prawdziwym źródłem tego lematu jest jednak dowód Proposition 3.2 z pracy P. Biane'a [11], będący podstawą dowodów subordynacji, czyli Twierdzenia 4.35 oraz 4.37. Analiza dowodu Proposition 3.2, wraz ze znajomością wyników [H2] pozwoliła na lepsze zrozumienie funkcji δ pojawiającej się na końcu dowodu Proposition 3.2 w pracy [11]. Współczynniki rozwinięcia δ w zerze w pracy [11] opisane są jedynie za pomocą pewnej skomplikowanej kombinatorycznej sumy. Powyższy lemat wyjaśnia, że współczynniki funkcji δ z dowodu P. Biane'a to łączne boolowskie kumulanty wolnych zmiennych.

Powyższy lemat ma następujące, natychmiastowe konsekwencje dla liczenia warunkowych wartości oczekiwanych wolnych zmiennych.

Wniosek 4.80. *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie W^*-przestrzenią probabilistyczną oraz $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ podalgebrą von Neumanna. Załóżmy, że $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ są dwiema rodzinami takimi że $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq \mathcal{B}$ i $(a_1, \ldots, a_n)$ oraz $\mathcal{B}$ są wolne. Wtedy mamy*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[a_1b_1a_1\ldots b_{n-1}a_n|\mathcal{B}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} b_{i_1}\ldots b_{i_k}\prod_{j=0}^{k}\beta_{2(i_{j+1}-i_j)-1}(a_{i_j+1}, b_{i_j+1}, \ldots, a_{i_{j+1}}), \end{aligned} \tag{40}$$

gdzie w powyższej sumie dla wszystkich ustalonych ciągów $0 < i_1 < \ldots < i_k < n$ mamy zawsze $i_0 = 0$ oraz $i_{k+1} = n$.

Istotną rolę w pracy [H3] odgrywa funkcja generująca naprzemiennych kumulant boolowskich zmiennych a, b postaci.

$$\eta_b^a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}(a, b, a, b, \ldots, b, a)z^{2n+1} \tag{41}$$

Wniosek 4.80 daje łatwy dowód subordynacji dla wolnych splotów addytywnego i multiplikatywnego. Oba te fakty można sprowadzić do następującego lematu.

Lemat 4.81. *Niech $(\mathcal{A},\varphi)$ będzie W^*-przestrzenią probabilistyczną oraz $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ będzie podalgebrą von Neumanna. Załóżmy, że $a\in\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są wolne, oraz ustalmy $b\in\mathcal{B}$ takie że $\|a\|\|b\|<1/5$. Wtedy mamy*

$$\mathbb{E}_\varphi\left[(1-ab)^{-1}a|\mathcal{B}\right]=\eta_b^a(1)(1-\eta_b^a(1)b)^{-1}, \tag{42}$$

gdzie $\eta_b^a(z)$ jest funkcją generującą zdefiniowaną w (41).

Powyższy lemat pozwala przedstawić addytywną i multiplikatywną funkcję subordynacji w postaci szeregów kumulant boolowskich. Taka reprezentacja funkcji subordynacji nie była wcześniej znana.

Wniosek 4.82. *(1) Załóżmy, że a oraz b są wolne i dodatnie. Wtedy dla odpowiednio małych z multiplikatywna funkcja subordynacji (6) spełnia*

$$F(z)=\eta_b^{za}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}(a,b,\ldots,b,a)z^{n+1}.$$

(2) Niech a i b będą samosprzężonymi, wolnymi zmiennymi losowymi, wtedy dla odpowiednio dużych z funkcja subordynacji $\omega(z)$ z (5) jest dana przez

$$\omega(z)=z-\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}(a,(z-b)^{-1},a,\ldots,(z-b)^{-1},a).$$

Jednym z głównych wyników pracy [H3] jest opis rozkładu $b+f(b)af(b)^*$ dla a,b samosprzężonych, wolnych. Poniższe twierdzenie daje subordynację dla „splotów” tego typu. Jest to twierdzenie analogiczne do Twierdzeń 3.1 i 3.6 z pracy P. Biane'a [11].

Twierdzenie 4.83. *Niech $(\mathcal{A},\varphi)$ będzie W^* przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy, że $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ jest podalgebrą von Neumanna. Niech a,b będą samosprzężone, oraz takie że $b\in\mathcal{B}$ oraz a i $\mathcal{B}$ są wolne. Załóżmy, że f jest funkcją borelowską na spektrum b, która nie jest stale równa zero. Wtedy istnieje funkcja δ o własnościach:*

1. *$\delta(z)$ jest funkcją subordynacji, tzn. mamy*

$$\mathbb{E}_\varphi\left[\left(z-b-f(b)af^*(b)\right)^{-1}\Big|\,\mathcal{B}\right]=\left(z-b-\delta(z)f(b)f^*(b)\right)^{-1} \tag{43}$$

dla $z\in\mathbb{C}^+$.

2. *Funkcja $\delta:\mathbb{C}^+\mapsto\mathbb{C}^-\cup\mathbb{R}$ jest analityczna oraz ma niestyczne granice*

$$\sphericalangle\text{-}\lim_{z\to\infty}\frac{\delta(z)}{z}=0.$$

3. *Równość*

$$M_{f(b)(z-b)^{-1}f(b)^*a}(1)=M_{f(b)(z-b)^{-1}f(b)^*}\left(\delta(z)\right) \tag{44}$$

zachodzi dla $z\in\mathbb{C}^+$.

4. Równoważnie $\delta(z)$ spełnia równanie punktu stałego

$$\widetilde{\eta}_a\left(\widetilde{\eta}_{f(b)(z-b)^{-1}f(b)^*}(\delta(z))\right) = \delta(z), \tag{45}$$

gdzie $\widetilde{\eta}(z) = \eta(z)/z$.

5. Funkcja δ jest jednoznacznie wyznaczona przez (2) *i* (3)*, oraz przez* (2) *i* (4).

Powyższe twierdzenia daje praktyczny „algorytm" pozwalający na wyznaczanie rozkładu $b + f(a)bf(a)^*$, dla a, b wolnych. Dokładniej daje receptę na znalezienie transformaty Cauchy'ego rozkładu zmiennej $b + f(a)bf(a)^*$.

Twierdzenie 4.84. *Niech a i b będą wolne i samosprzężone. Wtedy następująca procedura pozwala znaleźć rozkład $b + f(b)af^*(b)$.*

1. Obliczyć transformatę momentową $f(b)(z-b)^{-1}f(b)^*$

$$M_{f(b)(z-b)^{-1}f(b)^*}(s) = \int \frac{sx}{1 - \frac{s|f(x)|^2}{z-x}}\, d\mu(x),$$

gdzie μ to rozkład b.

2. Znaleźć przesuniętą transformatę boolowską $\widetilde{\eta}_a(s)$ i $\widetilde{\eta}_{f(b)(z-b)^{-1}f^*(b)}(s)$ korzystając z (4).

3. Rozwiązać równanie punktu stałego (45) *lub równoważne równanie*

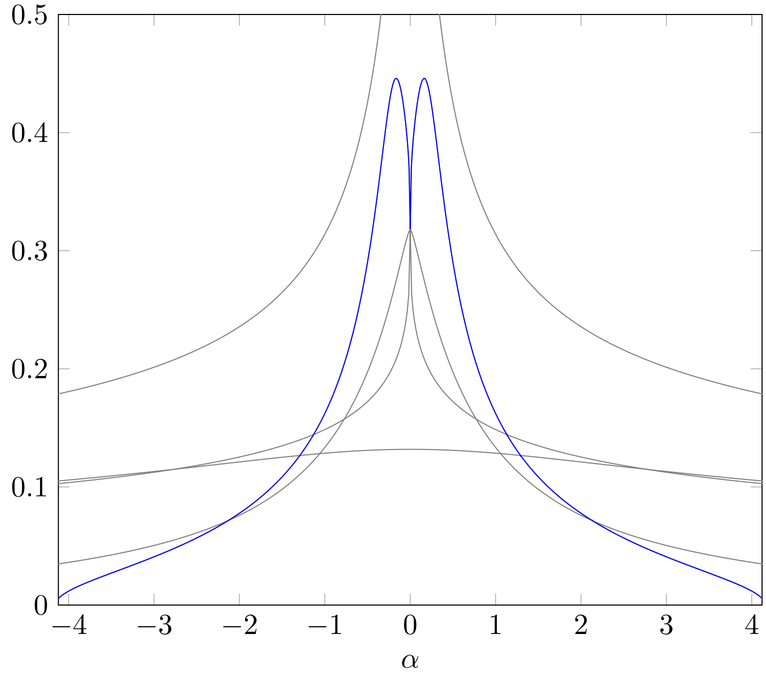
$$\widetilde{\eta}_{f(b)(z-b)^{-1}f(b)^*}(\delta(z)) = \widetilde{\eta}_a^{-1}(\delta(z)). \tag{46}$$

4. Obliczyć całkę

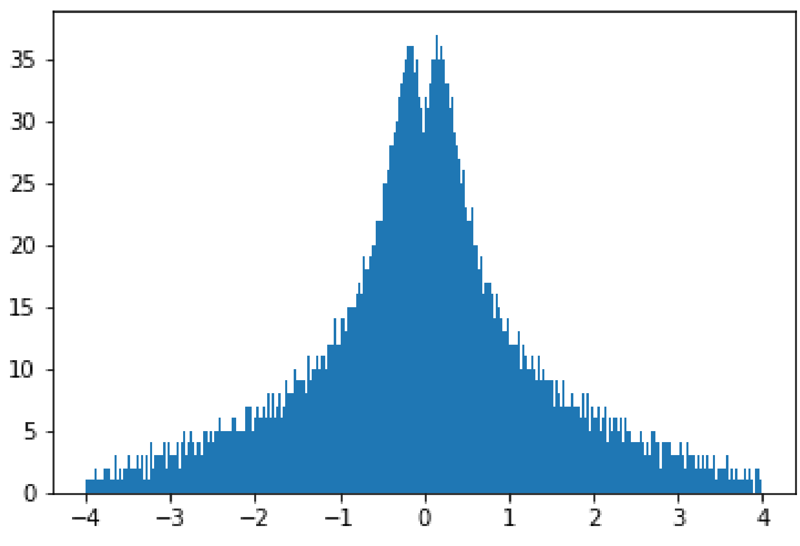
$$G_{b+f(b)af^*(b)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x - \delta(z)|f(x)|^2} d\mu(x), \tag{47}$$

gdzie $\delta(z)$ jest wyznaczona zgodnie z Twierdzeniem 4.83.

W dalszej części pracy [H3] przedstawione jest szczegółowo zastosowanie powyższego algorytmu w przypadku gdy a, b mają rozkład Wignera oraz $f(b) = b$. Ponieważ transformata Cauchy'ego jest funkcją algebraiczną, w kolejnych krokach za pomocą metod geometrii algebraicznej wyznaczane są równania spełniane przez kolejne funkcje występujące w Twierdzeniu 4.84. Do wyboru odpowiedniej gałęzi ostatecznego wyniku wykorzystywane są wielokąty Newtona, za pomocą których można wyznaczyć gałąź o odpowiedniej asymtotyce. Ostatecznie uzyskujemy równanie stopnia 11, które spełnia transformata Cauchy'ego. Równanie to pozwala uzyskać promień spektralny zmiennej $b + aba$ oraz pozwala na narysowanie gęstości zmiennej losowej. Dokładniej, korzystając ze wzoru Stieltjesa na odwrócenie można wyznaczyć równanie spełniane przez gęstość zmiennej $b + aba$. Poniżej przedstawiamy wykres rozwiązań równania, na niebiesko zaznaczone jest szukane rozwiązanie, prezentujemy również histogram wartości własnych aproksymacji macierzowej. Zaznaczamy, że nie jest znany algorytm pozwalający wybrać poprawną gałąź rozwiązania równania spełnianego przez gęstość, czyli gęstość dla interesującej nas zmiennej losowej, znając równanie algebraiczne, które ta gęstość spełnia. Natomiast znajomość nieredukowalnego równania, które spełnia transformata Cauchy'ego pozwala na badanie własności rozkładu. W przypadku gdy funkcja spełnia równanie algebraiczne wysokiego stopnia, oczywiście nie można zapisać tej funkcji jawnym wzorem, więc uzyskanie równania jest satysfakcjonującym wynikiem.



(a) Wykres gęstości μ_{b+bab} dla rozkładu Wignera



(b) Histogram wartości własnych dla aproksymacji rozkładu $b + bab$ w przypadku rozkładu Wignera macierzami losowymi rozmiaru 4000×4000

Rysunek 2: Rozkład $b + bab$ dla rozkładu Wignera

4.3.7 Praca [H4]

Głównym wynikiem pracy [H4] jest uogólnienie wyników z pracy [P2] oraz duże uproszczenie dowodów z tej pracy wykorzystując obserwacje z pracy [H3].

Praca ta początkowo nie była związana z programem badawczym realizowanym we wcześniej omawianych pracach [H1,H2,H3]. Była to kontynuacja badań prowadzonych w trakcie doktoratu i krótko po doktoracie dotyczących charakteryzacji rozkładów wolnych zmiennych losowych - prace [P1,P2,R1,R2,R3]. Jak wyjaśniamy poniżej głównym technicznym wynikiem pracy było policzenie pewnych dość skomplikowanych warunkowych wartości oczekiwanych od wolnych zmiennych losowych. W świetle wyników z pracy [H3] naturalnym podejściem do policzenia interesującej nas warunkowej wartości oczekiwanej było wykorzystanie kumulant boolowskich. Po raz kolejny okazały się one efektywnym narzędziem. Ponadto otrzymany wynik potwierdza, że boolowskie kumulanty pojawiają się w sposób naturalny przy obliczaniu warunkowych wartości oczekiwanych od wolnych zmiennych. Wcześniejszy dowód w [P2] wykorzystywał wolne kumulanty i unikał obliczania explicite kluczowej warunkowej wartości oczekiwanej, jednocześnie był dużo bardziej skomplikowany rachunkowo.

Praca [H4] dotyczy niezależnościowych charakteryzacji miar probabilistycznych. W klasycznej probabilistyce są to twierdzenia mówiące, że dla niezależnych zmiennych X, Y oraz pewnej ustalonej funkcji $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wektor losowy $(U, V) = \Psi(X, Y)$ ma składowe niezależne wtedy i tylko wtedy gdy X i Y mają pewne ustalone rozkłady. Przykładami są:

1. $\Psi(x, y) = (x + y, x - y)$, wtedy $U = X + Y$ i $V = X - Y$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy X, Y mają rozkłady Gaussowskie o tej samej wariancji. Jest to tw. Bernsteina udowodnione w [10].

2. $\Psi(x, y) = (x/(x + y), x + y)$, wtedy U, V są niezależne gdy X, Y mają rozkłady Gamma o tym samym parametrze skali. Jest to tw. Lukacsa (zob. [32])

Założenie o niezależności U i V typowo daje się zastąpić założeniem o stałości pewnych warunkowych wartości oczekiwanych typu $\mathbb{E}(V^i|U) = c$ oraz $\mathbb{E}(V^j|U) = d$ dla pewnej ustalonej pary (i, j) oraz ustalonych liczb rzeczywistych $c, d \in \mathbb{R}$ (zob. [29]).

Zauważmy, że w przypadku przytoczonego powyżej tw. Lukacsa mamy $X = UV$ oraz $Y = (1-U)V$ dodatkowo U oraz V są niezależne oraz mają rozkłady Beta i Gamma odpowiednio. W pracy [14] udowodnione zostało tzw „dualne twierdzenie Lukacsa", czyli następująca charakteryzacja rozkładów Beta i Gamma: załóżmy że U, V są niezależne, nieujemne, nośnik U zawarty jest w $(0, 1)$ oraz $\mathbb{E}(((1 - U)V)^i) = c$ i $\mathbb{E}(((1 - U)V)^j) = d$, dla pewnych $c, d \in \mathbb{R}$ oraz jednej z par $(i, j) \in \{(-1, -2), (-1, 1), (1, 2)\}$ wtedy U, V mają rozkłady Beta i Gamma odpowiednio.

Wraz z rozwojem wolnej probabilistyki zauważono, że charakteryzacje niezależnościowe z klasycznej probabilistyki mają swoje odpowiedniki w wolnej probabilistyce. W szczególności w pracy [35] udowodniono, że dla a, b wolnych $a+b$ oraz $a-b$ są wolne wtedy i tylko wtedy gdy a, b mają rozkład Wignera o tej samej wariancji. Wolne odpowiedniki wyników regresyjnych z pracy [29] zostały udowodnione w [16].

W pracy [P1] udowodniono wolny odpowiednik dualnego twierdzenia Lukacsa z pracy [14] w przypadku $(i, j) = (1, 2)$, następnie w pracy [P2] udowodniono przypadki $(i, j) \in \{(-1, -2), (-1, 1)\}$. W pracy [R2] pokazano jak wykorzystując subordynację dla wolnego splotu addytywnego i multiplikatywnego można uprościć dowody z prac [16] oraz [P1] jednocześnie osłabiając założenia, w szczególności w pracy [R2] nie zakładano, że zmienne są ograniczone, co było istotnym założeniem we wcześniejszych pracach. Techniki subordynacji nie dały się natomiast zastosować do wyników z pracy [P2]. Głównym celem pracy [H4] było przezwyciężenie trudności przy próbie zastosowanie technik subordynacji do wyników z pracy [P2]. Ostatecznie okazało się, że subordynacja daje się zastosować w wolnym dualnym twierdzeniu Lukacsa w przypadku $(i, j) = (-1, 1)$, natomiast w przypadku $(i, j) = (-1, -2)$ oprócz wykorzystania funkcji subordynacji niezbędne było obliczenie pewnej warunkowej wartości oczekiwanej. Dodatkowo obliczenie interesującej nas warunkowej wartości oczekiwanej znacznie uprościło dowód twierdzenia w przypadku $(i, j) = (-1, -2)$.

Poniżej formułujemy dokładnie dwa twierdzenia charakteryzacyjne udowodnione w pracy [H4].

Twierdzenie 4.85. *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie W^*-przestrzenią probabilistyczną. Niech $u, v \in \mathcal{A}$ będą wolne oraz, takie że $0 < u < 1$ i $v > 0$. Załóżmy, że dla pewnych $b, c \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}\left(v^{1/2}(1-u)v^{1/2} \middle| v^{1/2}uv^{1/2} \right) = bI, \tag{48}$$

$$\mathbb{E}\left([v^{1/2}(1-u)v^{1/2}]^{-1} \middle| v^{1/2}uv^{1/2} \right) = cI. \tag{49}$$

Wtedy v ma rozkład wolny Poissona oraz u ma rozkład wolny dwumianowy.

Uwaga 4.86. *Ponieważ do dowodu powyższego twierdzenia wykorzystane są tylko funkcje subordynacji, zachodzi ono przy słabszych założeniach, dopuszczających nieograniczone zmienne u, v, które są afiliowane do algebry von Neumanna $\mathcal{A}$.*

Wydaje się, że kolejne twierdzenie nie może być udowodnione odwołując się wyłącznie do subordynacji dla wolnego splotu multiplikatywnego.

Twierdzenie 4.87. *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie W^* przestrzenią probabilistyczną. Niech $0 < u < 1$ i $v > 0$ będą wolne. Załóżmy że dla pewnych $c, d \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek (49) oraz*

$$\mathbb{E}\left([v^{1/2}(1-u)v^{1/2}]^{-2} \middle| v^{1/2}uv^{1/2} \right) = dI. \tag{50}$$

Wtedy v ma rozkład wolny Poissona oraz u ma rozkład wolny dwumianowy.

Poniżej stosować będziemy oznaczenie $\Psi_a(z) := za\,(1 - za)^{-1}$ dla nieprzemiennej zmiennej losowej a. Kluczowym do dowodu powyższego twierdzenia jest następujące atwierdzenie, w którym za pomocą kumulant boolowskich znajdujemy pewną dość skomplikowaną warunkową wartość oczekiwaną. Zwracamy uwagę, że boolowskie kumulanty pojawiają się w poniższym stwierdzeniu w bardzo naturalny sposób. Dodatkowo wydaje się, że obliczenie poniższej warunkowej wartości oczekiwanej przy pomocy wolnych kumulant jest o wiele trudniejsze.

Stwierdzenie 4.88. *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie W^*-przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy, że $u, v \in \mathcal{A}$ są wolne, ograniczone oraz $0 \leq u < 1$. Niech f oraz g będą funkcjami borelowskimi, takimi że $f(u)$ oraz $g(u)$ są ograniczone. Wtedy dla z w pewnym otoczeniu 0 oraz ω_1, ω_2 spełniających*

$$M_{uv}(z) = M_v(\omega_1(z)) = M_u(\omega_2(z)). \tag{51}$$

mamy

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(f(u)u^{-1/2}\Psi_{u^{1/2}vu^{1/2}}(z)u^{-1/2}g(u) \middle| v \right) \qquad (52) \\ &\qquad = \omega_2(z)\eta_u^{f,g}(\omega_2(z)) + z\eta_u^f(\omega_2(z))\eta_u^g(\omega_2(z))v\left(1 + \Psi_v(\omega_1(z))\right), \end{aligned}$$

gdzie

$$\eta_u^{f,g}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{l+2}(f(u), u, \ldots, u, g(u))z^{\ell}, \tag{53}$$

$$\eta_u^{f}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{l+1}(f(u), u, \ldots, u)z^{\ell}. \tag{54}$$

$$\eta_u^{g}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{l+1}(u, u, \ldots, g(u))z^{\ell}. \tag{55}$$

Następnie dla $f = g = \psi$ znajdujemy wzory explicite na funkcje $\eta_u^{f,g}, \eta_u^f, \eta_u^g$. Co pozwala na sformułowanie kolejnego stwierdzenia, które stosujemy bezpośrednio w dowodzie Twierdzenia 4.87.

Stwierdzenie 4.89. *Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie W^* przestrzenią probabilistyczną. Niech $u, v \in \mathcal{A}$ będą wolne ograniczone. Wtedy dla z w pewnym otoczeniu 0 mamy*

$$\mathbb{E}\left((1-u)^{-1}u^{1/2}\Psi_{u^{1/2}vu^{1/2}}(z)u^{1/2}(1-u)^{-1} \middle| v\right) = B(z) + zA^2(z)v\left(1 + \Psi_v(\omega_1(z))\right), \tag{56}$$

gdzie

$$A(z) = \frac{\eta_u(\omega_2(z)) - \eta_u(1)}{\omega_2(z) - 1}\,\varphi\left((1-u)^{-1}\right), \tag{57}$$

$$B(z) = \frac{\omega_2(z)(\eta_u(\omega_2(z)) - \eta_u(1) - (\omega_2(z)-1)\eta_u'(1))}{(\omega_2(z)-1)^2}\,\varphi^2\left((1-u)^{-1}\right) \tag{58}$$

oraz ω_1, ω_2 są funkcjami subordynacji dla wolnego splotu multiplikatywnego, tzn. zachodzi (51).

Poza powyższymi wynikami w pracy [H4] przedstawiony został krótki dowód tzw. wolnej własnosci Lukacsa tj. twierdzenia mówiącego, że dla wolnych zmiennych losowych x, y o rozkładach wolnych Poissona zmienne losowe $x + y$ oraz $(x + y)^{-1/2}x(x + y)^{-1/2}$ są wolne. Wcześniejszy dowód tej własności z pracy [P3] polegał na pokazaniu wprost, że wolne mieszane kumulanty łączne zmiennych $x+y$ oraz $(x+y)^{-1/2}x(x+y)^{-1/2}$ są równe zero. Główny wysiłek w pracy [P3] był kombinatoryczny i dotyczył obliczenia wolnych łącznych kumulant zmiennej x oraz x^{-1} dla zmiennej x odwracalnej o rozkładzie wolnym Poissona. Nowy dowód przedstawiony w pracy [H4] opiera się na wynikach pracy [19] gdzie zaobserwowana została asymptotyczna wolność dla związanego z dualnym twierdzeniem Lukacsa modelem macierzowym oraz na własności dualnej z [P1].

4.4 Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe

Praca [H1]:

- Sformułowanie i dowody Twierdzenia 2.8, Proposition 2.13 opisujących najważniejsze własności operatorów η-diagonalnych zostały wypracowane podczas wspólnych dyskusji z A. Nica.
- Sekcje 3 i 4 zawierają głównie omówienie wcześniej znanych wyników.
- Sekcja 5 zawiera model operatorowy dla operatora η-diagonalnego, model ten został znaleziony przez H. Bercovici.
- Sformułowanie i dowód Theorem 6.4 zostały uzyskane wspólnie z A. Nica.
- Corollary 6.5 mówiące o wolnej nieskończonej podzielności rozkładów części dodatnich wraz z dowodem zostało uzyskane przez habilitanta.
- Sformułowanie i dowód Proposition 6.7 oraz opis części dodatnich nieskończenie podzielnych rozkładów KMS pochodzą od habilitanta.
- Główny wynik sekcji 7 czyli Theorem 7.8 mówiące, że wolny splot multiplikatywny nieskończenie podzielnych rozkładów R-diagonalnych jest nieskończenie podzielnym rozkładem R-diagonalnym został uzyskany przez habilitanta. W szczególności kluczowa obserwacja, pozwalająca wykorzystać multiplikatywne funkcje subordynacji do dowodu Theorem 7.8 pochodzą od habilitanta.
- Proposition 7.11 w całości zostało uzyskane przez habilitanta.
- Duża część pracy redakcyjnej, dotyczącej wszystkich sekcji została wykonana przez habilitanta.

Praca [H2]:

- Główna obserwacja która doprowadziła do napisania pracy, mówiąca że Boolowskie kumulanty dają wygodny opis $*$-rozkładu iloczynu wolnych zmiennych, pochodzi od habilitanta.
- Habilitant znalazł charekteryzację wolności w terminach kumulant boolowskich (Theorem 1.2), z innym dowodem.
- Theorem 1.1 mówiące, że partycje z własnością VNRP są maksymalne względem $\ll$ wraz z dowodem został znaleziony wspólnie z A. Nica.
- Pierwotne sformułowanie Theorem 1.7 wraz z dowodem pochodzi od habilitanta. Zarówno sformułowanie jak i dowód zostały zmodyfikowane podczas dyskusji ze współpracownikami.
- Zastosowanie Theorem 1.7 do wolnego antykomutatora było pomysłem habilitanta. Główny pomysł na znalezienie układu równań w Theorem 1.11 oraz Theorem 6.1 pochodzi od habilitanta. Ostateczna postać układu równań w Theorem 1.11 oraz Theorem 6.1 została uzyskana podczas wspólnych dyskusji ze współpracownikami.

- Wszystkie przykłady w sekcji 6.1 zostały znalezione przez habilitanta.
- Duża część pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H3]:

- Wszystkie wyniki w pracy zostały uzyskane podczas wspólnych dyskusji z F. Lehnerem. Najważniejsza obserwacja pozwalająca na dowód głównego technicznego wyniku Lemma 3.1 dotycząca roli boolowskich kumulant dla subordynacji pochodzi od habilitanta. Niemniej, tak jak wszystkie wyniki tej pracy, obserwacja ta również została poczyniona w trakcie wspólnej dyskusji z F. Lehnerem.
- Prace redakcyjne zostały wykonane w połowie przez habilitanta w połowie przez F. Lehnera.

Praca [H4]:

- Obliczenie warunkowej wartości oczekiwanej Proposition 3.3 - główny wynik techniczny pracy pochodzi od habilitanta.
- Dowody Theorem 4.1 i 4.3 zostały wypracowane podczas dyskusji z J. Wesołowskim.
- Pomysł dowodu Theorem 5.1 pochodzi od J. Wesołowskiego.
- Prace redakcyjne zostały wykonane połowie przez habilitanta w połowie przez J. Wesołowskiego.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

5.1 Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora.

Wszystkie publikacje habilitanta wydane przed doktoratem wchodziły w skład rozprawy doktorskiej i dotyczyły twierdzenia Lukacsa w wolnej probabilistyce.

[P1] K. Szpojankowski, J. Wesołowski, Dual Lukacs regressions for non-commutative variables. *J. Funct. Anal.* 266 (2014), no. 1, 36–54.

[P2] K. Szpojankowski, Dual Lukacs regressions of negative orders for noncommutative variables. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 17 (2014), no. 3, 1450021.

[P3] K. Szpojankowski, On the Lukacs property for free random variables. *Studia Math.* 228 (2015), no. 1, 55–72.

Badania przed uzyskaniem stopnia doktora zostały krótko opisane w części autoreferatu poświęconej pracy [H4]. Przypomnijmy, że charakteryzacją niezależnościową nazywamy twierdzeniemówiące, że dla niezależnych zmiennych X, Y oraz pewnej ustalonej funkcji $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wektor losowy $(U, V) = \Psi(X, Y)$ ma składowe niezależne wtedy i tylko wtedy gdy X i Y mają pewne ustalone rozkłady.

Badania w trakcie doktoratu dotyczyły wolnego odpowiednika twierdzenia Lukacsa. W klasycznej probabilistyce twierdzenie Lukacsa mówi, że dla dodatnich, niezależnych zmiennych losowych X, Y zmienne $X + Y$ oraz $\frac{X}{X+Y}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy X, Y mają rozkłady Gamma o tym samym parametrze skali (zob. [32]). Twierdzenie to ma swoje uogólnienia na macierze losowe. W przypadku macierzowym (zob. [13, 26]) rozważa się niezależne macierze X_N, Y_N wymiaru $N \times N$, okazuje się, że $V_N = X_N + Y_N$ i $U_N = (X_N + Y_N)^{-1/2} X_N (X_N + Y_N)^{-1/2}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy X_N i Y_N mają rozkłady Wisharta z odpowiednimi parametrami.

Mając na uwadze asymptotyczną wolność macierzy losowych, widzimy, że ciągi $(X_N)_N$ i $(Y_N)_N$ są asymptotycznie wolne, podobnie $(U_N)_N$ oraz $(V_N)_N$ są asymptotycznie wolne. Dodatkowo asypmtotyczny rozkład wartości własnych dla macierzy Wisharta jest znany to tzw. rozkład Marchenko-Pastur funkcjonujący również pod nazwą wolny Poisson (zob. [33]).

Tak jak to zostało opisane w części dotyczącej pracy [H4], w przypadku jednowymiarowym daje się osłabić założenie o niezależności zmiennych U, V w twierdzeniach charakteryzacyjnych takich jak opisano powyżej. Zamiast niezależności U i V wystarczy zakładać, że pewne warunkowe wartości oczekiwane V pod warunkiem U są stałe, twierdzenia takie nazywamy charakteryzacjami regresyjnymi. W szczególności rozważając twierdzenie Lukacsa, w przypadku charakteryzacji regresyjnych uzasadnione jest rozważanie schematu dualnego, gdzie zakładamy, że U i V są niezależne i dodaktowo zakładamy, że stałe są pewne warunkowe momenty $Y = (1 - U)V$ pod warunkiem $X = UV$ (zob. [14]). Charakteryzacje tego typu pojawiły się w kontekście wolnych zmiennych losowych w pracy [16].

Prace [P1] i [P2] dotyczą charakteryzacji regresyjnych. Udowodniono w nich wolne odpowiedniki charakteryzacji regresyjnych w dualnym schemacie Lukacsa.

Praca [P3] dotyczyła twiedzenia Lukacsa w wolnej probabilistyce. Dokładniej dla wolnych zmiennych a, b o rozkładzie wolnym Poissona udowadniamy, że jeśli zmienna $(a + b)$ jest odwracalna, to $a + b$ oraz $(a + b)^{-1/2} a (a + b)^{-1/2}$ są wolne. Dowód przebiega przez wykazanie, że łączne wolne kumulanty zmiennych $a + b$ oraz $(a + b)^{-1/2} a (a + b)^{-1/2}$ są zero. Głównym narzędziem w dowodzie jest wzór dający łączne wolne kumulanty a i a^{-1} dla zmiennej losowej a o rozkładzie wolnym Poissona, odwracalnej (należy wykluczyć sytuację, gdy a ma atom w zerze).

5.2 Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora spoza rozprawy habilitacyjnej.

W początkowym okresie po doktoracie habilitant kontynuował badania dotyczące niezależnościowych charakteryzacji w wolnej probabilistyce. Prace dotyczące tej tematyki to.

[R1] K. Szpojankowski, A constant regression characterization of the Marchenko-Pastur law *Probab. Math. Statist.* 36 (2016), no. 1, 137–145.

[R2] W. Ejsmont, U. Franz, K. Szpojankowski, Convolution, subordination, and characterization problems in noncommutative probability *Indiana Univ. Math. J.* 66 (2017), no. 1, 237–257.

[R3] K. Szpojankowski, On the Matsumoto-Yor property in free probability, *J. Math. Anal. Appl.*, 445 (2017), no. 1, 374–393.

Praca [R1] dotyczy regresyjnej charakteryzacji rozkładu wolnego Poissona, gdzie dla a, b wolnych zakładamy, że $\mathbb{E}\left(a|a+b\right) = c(a+b)$ oraz $\mathbb{E}\left(a^{-1}|a+b\right) = c(a+b)^{-1}$. Techniki stosowane w dowodzie powyższego twierdzenia są analogiczne do tych wypracowanych w ramach doktoratu.

W pracy [R2] wypracowana została efektywniejsza metoda dowodzenia charakteryzacji regresyjnych w wolnej probabilistyce wykorzystująca addytywną i multiplikatywną funkcje subordynacji. Wyniki prac [16] i [P1] zostały w ten sposób uproszczone. Wykorzystując nową metodologię udowodniono również nieznaną wcześniej charakteryzację rozkładu wolnego dwumianowego, analogiczną do znanej charakteryzacji rozkładu Beta z pracy [40]. Dodatkowo w pracy [R2] badana była klasa rozkładów Meixnera dla zmiennych monotonicznie niezależnych. Okazało się, że jest ona równa klasie rozkładów wolnych Meixnera.

W pracy [R3] badany był wolny odpowiednik tak zwanej własności Matsumoto-Yor'a dającej charakteryzację rozkładów Gamma i GIG (Generalized Inverse Gaussian). Okazuje się, że dla X, Y niezależnych zmienne $U = \frac{1}{X+Y}$ oraz $V = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+Y}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkłada GIG, a Y ma rozkład Gamma (zob. [31]). W pracy [31] rozważano również uogólnienie tego wyniku na macierze losowe. W pracy [R3] uzyskano wolny odpowienik tej charakteryzaji, gdzie rozkład wolny Poissona ponownie gra rolę rozkładu Gamma, natomiast rolę rozkładu GIG gra graniczny rozkład empiryczny wartości własnych dla macierzy GIG znaleziony w pracy [21], w dalszej części będziemy nazywać tę miarę probabilistyczną rozkładem wolnym GIG. Rozkład wolny GIG nie był wcześniej badany w kontekście wolnej probabilistyki, co było motywacją do powstania pracy [R5]. Przed opisem pracy [R4] (zob. dalej) opiszemy pracę [R5], która jest związana z pracą [R3].

[R5] T. Hasebe, K. Szpojankowski, On free generalized inverse Gaussian distributions, *Complex Anal. Oper. Theory* 13 (2019), no. 7, 3091–3116.

Rozkład wolny GIG jest jednym z przykładów rozkładów które w świetle wyników pracy [R3] ma ciekawe własności w wolnej probabilistyce a jednocześnie gęstość rozkładu jest zadana jawnym wzorem. W pracy [R5] zbadane zostały własności tego rozkładu w kontekście wolnej probabilistyki, okazuje się, że rozkład ten ma wiele własności analogicznych do klasycznego rozkładu GIG. W szczególności w pracy [R5] pokazano, że podobnie jak klasyczny rozkład GIG, który jest nieskończenie podzielny, rozkład wolny GIG jest: nieskończenie podzielny w wolnym splocie addytywnym, a nawet więcej, pokazano że należy do podklasy zmiennych $\boxplus$-nieskończenie podzielnych, tzw. rozkładów wolnych regularnych (free regular). Zbadano również wolną samorozkładalność rozkładu wolnego GIG, która zachodzi tylko dla pewnego zakresu parametrów. Pokazano, że rozkład wolny GIG maksymalizuje pewien funkcjonał wolnej entropii, analogiczny do funkcjonału klasycznej entropii, który osiąga wartość maksymalną dla rozkładu GIG. Dodatkowo udowodniono charakteryzację rozkładu wolnego GIG za pomocą "ułamków łańcuchowych", która jest analogiem znanej charakteryzacji rozkładu GIG [30].

[R4] P. Józiak, K. Szpojankowski, Quantum Bernstein's theorem and the hyperoctahedral quantum group, *J. Math. Phys.* 59 (2018) , 063511.

W pracy [R4] badano uogólnienie twierdzenia Bernsteina [10] mówiącego, że dla wektora losowego o składowych niezależnych $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_N)^T$ jeśli po działaniu ustalonej macierzy ortogonalnej A (która nie jest równoważna znakowanej permutacji - czyli spoza grupy hiperoktahedralnej) jeśli wektor $A\underline{X}$ ma składowe niezależne to zmiennej $X_1, \ldots, X_N$ mają rozkłady Gaussowskie. Analogiczny wynik w wolnej probabilistyce uzyskał Nica w pracy [35]. Twierdzenie Bernsteina mówi tak na prawdę o pewnej symetrii wektorów Gaussowskich przy rotacjach/refleksjach. Wiadomo, że w nieprzemiennej probabilistyce klasyczne symetrie są zastępowane przez kwantowe symetrie (zob. [27]) dodatkowo kwantowym uogólnieniem grupy ortogonalnej jest tzw. kwantowa grupa ortogonalna. Głównym wynikiem pracy [R4] jest twierdzenie charakteryzujące N-tki wolnych zmiennych o rozkładzie Wignera za pomocą zachowywania wolności przy przekształceniach pochodzących z kwantowej grupy ortogonalnej, z wykluczeniem kwantowej grupy hiperoktahedralnej. Precyzyjne sformułowanie głównego wyniku z pracy [R4] wymaga wprowadzenia kilku pojęć nie omawianych powyżej, dlatego jest tu pominięte.

[R6] M. Février, M Mastnak, A. Nica, K. Szpojankowski, A construction which relates c-freeness to infinitesimal freeness. *Adv. in Appl. Math.* 110 (2019), 299–341.

Głównym celem pracy [R6] było powiązanie dwóch struktur rozszerzających pojęcie nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej poprzez dodanie drugiego funkcjonału. Pierwsza ze struktur z nich jest związana z pojęciem c-wolności wprowadzonej w [17, 18], w tym przypadku mamy $(\mathcal{A}, \varphi, \chi)$, gdzie $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ jest unormowany. Druga struktura jest związana z tzw. infinitezymalną wolnością $(\mathcal{A}, \varphi, \varphi')$ wprowadzoną w [12, 6, 22]. W pracy [6] zauważono pewien związek pomiędzy c-wolnością i wolnością infinitezymalną na poziomie rozkładów jednowymiarowych. W pracy [R6] przedstawiona została konstrukcja która uogólnia ten wynik na przestrzeń wielowymiarowych, nieprzemiennych rozkładów łącznych. Dodatkowo w pracy szczegółowo omówione są związki pomiędzy różnymi partycjami pojawiającymi się zarówno w opisie c-wolności jak i infinitezymalnej wolności.

6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

a) Wyjazdy długoterminowe:

1 09.2015-08.2016 Roczny staż podoktorski (Postdoc)
"Non-commutative probability",
Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Kanada,
pod opieką prof. Alexandru Nica.

b) Wyjazdy krótkoterminowe w ramach współpracy naukowej:

1 University of Waterloo, Waterloo, Kanada (współpraca z A. Nica): 2014.04.27-2014.05.03, 2017.08.21-2017.08.31

2 Technische Universität Graz, Graz, Austria (współpraca z F. Lehner): 2017.02.13-2017.02.17,2018.03.12-2018.03.17,2018.12.09-2018.12.15,2020.02.02-2020.02.08

3 St. Mary's University, Halifax, Kanada (współpraca z M. Mastnak), 2018.08.10-2018.08.18

4 University of Texas at San Antonio, San Antonio, Stany Zjednoczone (współpraca z M. Popa), 2019.10.22-2019.10.31

5 Université Paris-Saclay, Paryż, Francja (współpraca z M. Fevrier), 2021.06.25-2021.07.03

7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

7.1 Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną.

a) 2021 - Nagroda indywidualna I stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2019/20,

b) 2019 - Nagroda indywidualna I stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2017/18,

c) 2017 - Nagroda indywidualna II stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2015/16,

d) 2015 - Nagroda indywidualna III stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w roku 2014 (za wyróżnioną rozprawę doktorską),

e) 2013 - Stypendium w ramach programu Marszałka Województwa Mazowieckiego „Rozwój nauki - rozwojem regionu" (za innowacyjne badania naukowe w obszarach uznanych za szczególnie istotne dla rozwoju województwa mazowieckiego),

f) 2011 - Trzecia nagroda w *XLIV Konkursie na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki*, Wrocław.

7.2 Doświadczenie dydaktyczne.

- Prowadzone wykłady:
  1. Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych:
     Przetwarzanie i Analiza Danych w Systemie SAS, *Introduction to SAS System.*
  2. University of Waterloo, Department of Pure Mathematics:
     Linear Algebra 1, Linear Algebra 2.
- Prowadzone ćwiczenia i laboratoria:
  1. Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych:
     Rachunek prawdopodobieństwa, *Rachunek prawdopodobieństwa I*, *Rachunek prawdopodobieństwa II*, *Przetwarzanie i analiza danych w systemie SAS*
  2. Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych:
     Probabilistyka.
  3. Politechnika Warszawska, Wydział Geodezji i Kartografii: *Matematyka 1*, *Matematyka 2*, *Algebra Liniowa.*

7.3 Opieka nad studentami.

- Obronione 2 prace magisterskie oraz 5 prac licencjackich, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.

7.4 Inne

- Habilitant jest koordynatorem zespołu pracującego nad nową specjalizacją na studiach drugiego stopnia na kierunku Matematyka i Analiza Danych na wydziale MiNI. Nowa specjalizacja skupiać się będzie na metodach probabilistycznych stosowanych w analizie danych takich jak: grafy losowe, macierze losowe, modele grafowe, optymalizacja stochastyczna, wysoko-wymiarowa probabilistyka, całki stochastyczne.

- Habilitant jest jednym z członków komitetu organizacyjnego konferencji *Independence and Conditional Aspects of Probability.* Konferencja początkowo planowana była na lato 2020, z powodu pandemii została dwukrotnie przeniesiona na późniejszy termin. Aktualnie jest planowana na 17-23 lipca 2022.

8 Literatura

[H1] H. Bercovici, A. Nica, M. Noyes, K. Szpojankowski, Eta-diagonal distributions and infinite divisibility for R-diagonals, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* , 54(2) (2018), 907–937.

[H2] M. Fevrier, M. Mastnak, A. Nica, K. Szpojankowski, Using Boolean cumulants to study multiplication and anti-commutators of free random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(10) (2020), 7167–7205.

[H3] F. Lehner, K. Szpojankowski, Boolean cumulants and subordination in free probability, *Random Matrices Theory Appl.*, dostępna online (2020), https://doi.org/10.1142/S2010326321500362.

[H4] K. Szpojankowski, J. Wesołowski Conditional expectations through Boolean cumulants and subordination—towards a better understanding of the Lukacs property in free probability., *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 17 (1) (2020), 253–272.

[P1] K. Szpojankowski, J. Wesołowski, Dual Lukacs regressions for non-commutative variables. *J. Funct. Anal.* 266 (2014), no. 1, 36–54.

[P2] K. Szpojankowski, Dual Lukacs regressions of negative orders for noncommutative variables. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 17 (2014), no. 3, 1450021.

[P3] K. Szpojankowski, On the Lukacs property for free random variables. *Studia Math.* 228 (2015), no. 1, 55–72.

[R1] K. Szpojankowski, A constant regression characterization of the Marchenko-Pastur law *Probab. Math. Statist.* 36 (2016), no. 1, 137–145.

[R2] W. Ejsmont, U. Franz, K. Szpojankowski, Convolution, subordination, and characterization problems in noncommutative probability *Indiana Univ. Math. J.* 66 (2017), no. 1, 237–257.

[R3] K. Szpojankowski, On the Matsumoto-Yor property in free probability, *J. Math. Anal. Appl.*, 445 (2017), no. 1, 374–393.

[R4] P. Józiak, K. Szpojankowski, Quantum Bernstein's theorem and the hyperoctahedral quantum group, *J. Math. Phys.* 59 (2018) , 063511.

[R5] T. Hasebe, K. Szpojankowski, On free generalized inverse Gaussian distributions, *Complex Anal. Oper. Theory* 13 (2019), no. 7, 3091–3116.

[R6] M. Février, M Mastnak, A. Nica, K. Szpojankowski, A construction which relates c-freeness to infinitesimal freeness. *Adv. in Appl. Math.* 110 (2019), 299–341.

[1] A. S. Bandeira, M. T. Boedihardjo, and R. van Handel. Matrix concentration inequalities and free probability, 2021. Preprint, arXiv:2108.06312.

[2] S. T. Belinschi and H. Bercovici. Partially defined semigroups relative to multiplicative free convolution. *Int. Math. Res. Not.*, (2):65–101, 2005.

[3] S. T. Belinschi and H. Bercovici. A new approach to subordination results in free probability. *J. Anal. Math.*, 101:357–365, 2007.

[4] S. T. Belinschi, A. Guionnet, and J. Huang. Large deviation principles via spherical integrals, 2020. Preprint, 2004.07117.

[5] S. T. Belinschi and A. Nica. η-series and a Boolean Bercovici-Pata bijection for bounded k-tuples. *Adv. Math.*, 217(1):1–41, 2008.

[6] S. T. Belinschi and D. Shlyakhtenko. Free probability of type B: analytic interpretation and applications. *Amer. J. Math.*, 134(1):193–234, 2012.

[7] S. T. Belinschi, P. Śniady, and R. Speicher. Eigenvalues of non-Hermitian random matrices and Brown measure of non-normal operators: Hermitian reduction and linearization method. *Linear Algebra Appl.*, 537:48–83, 2018.

[8] H. Bercovici and V. Pata. Stable laws and domains of attraction in free probability theory. *Ann. of Math. (2)*, 149(3):1023–1060, 1999. With an appendix by Philippe Biane.

[9] H. Bercovici and D. Voiculescu. Free convolution of measures with unbounded support. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3):733–773, 1993.

[10] S. N. Bernstein. On a property which characterizes a Gaussian distribution. *Proc. Leningrad Polytech. Inst.*, 217(3):21–22, 1941.

[11] P. Biane. Processes with free increments. *Math. Z.*, 227(1):143–174, 1998.

[12] P. Biane, F. Goodman, and A. Nica. Non-crossing cumulants of type B. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(6):2263–2303, 2003.

[13] K. Bobecka and J. Wesołowski. The Lukacs-Olkin-Rubin theorem without invariance of the "quotient". *Studia Math.*, 152(2):147–160, 2002.

[14] K. Bobecka and J. Wesołowski. Three dual regression schemes for the Lukacs theorem. *Metrika*, 56(1):43–54, 2002.

[15] M. Bożejko. Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product. *Boll. Un. Mat. Ital. A (6)*, 5(1):13–21, 1986.

[16] M. Bożejko and W. Bryc. On a class of free Lévy laws related to a regression problem. *J. Funct. Anal.*, 236(1):59–77, 2006.

[17] M. Bożejko, M. Leinert, and R. Speicher. Convolution and limit theorems for conditionally free random variables. *Pacific J. Math.*, 175(2):357–388, 1996.

[18] M. Bożejko and R. Speicher. ψ-independent and symmetrized white noises. In *Quantum probability & related topics*, QP-PQ, VI, pages 219–236. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

[19] M. Capitaine and M. Casalis. Asymptotic freeness by generalized moments for Gaussian and Wishart matrices. Application to beta random matrices. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(2):397–431, 2004.

[20] B. Collins, T. Mai, A. Miyagawa, Parraud F., and Yin S. Convergence for noncommutative rational functions evaluated in random matrices, 2021. Preprint, arXiv:2103.05962.

[21] D. Féral. The limiting spectral measure of the generalised inverse Gaussian random matrix model. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(7):519–522, 2006.

[22] M. Février and A. Nica. Infinitesimal non-crossing cumulants and free probability of type B. *J. Funct. Anal.*, 258(9):2983–3023, 2010.

[23] U. Haagerup and F. Larsen. Brown's spectral distribution measure for R-diagonal elements in finite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, 176(2):331–367, 2000.

[24] J. W. Helton, T. Mai, and R. Speicher. Applications of realizations (aka linearizations) to free probability. *J. Funct. Anal.*, 274(1):1–79, 2018.

[25] D. Jekel and W. Liu. An operad of non-commutative independences defined by trees, 2019. Preprint, arXiv:1901.09158.

[26] B. Kołodziejek. The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones through Gleason's theorem. *Studia Math.*, 217(1):1–17, 2013.

[27] C. Köstler and R. Speicher. A noncommutative de Finetti theorem: invariance under quantum permutations is equivalent to freeness with amalgamation. *Comm. Math. Phys.*, 291(2):473–490, 2009.

[28] G. Kreweras. Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Math.*, 1(4):333–350, 1972.

[29] R. G. Laha and E. Lukacs. On a problem connected with quadratic regression. *Biometrika*, 47:335–343, 1960.

[30] G. Letac and V. Seshadri. A characterization of the generalized inverse Gaussian distribution by continued fractions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 62(4):485–489, 1983.

[31] G. Letac and J. Wesołowski. An independence property for the product of GIG and gamma laws. *Ann. Probab.*, 28(3):1371–1383, 2000.

[32] E. Lukacs. A characterization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statist.*, 26:319–324, 1955.

[33] V. A. Marchenko and L. A. Pastur. Distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114):507–536, 1967.

[34] J. A. Mingo and R. Speicher. *Free probability and random matrices*, volume 35 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2017.

[35] A. Nica. R-transforms of free joint distributions and non-crossing partitions. *J. Funct. Anal.*, 135(2):271–296, 1996.

[36] A. Nica and R. Speicher. On the multiplication of free N-tuples of noncommutative random variables. *Amer. J. Math.*, 118(4):799–837, 1996.

[37] A. Nica and R. Speicher. R-diagonal pairs—a common approach to Haar unitaries and circular elements. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 of *Fields Inst. Commun.*, pages 149–188. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[38] A. Nica and R. Speicher. Commutators of free random variables. *Duke Math. J.*, 92(3):553–592, 1998.

[39] A. Nica and R. Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, volume 335 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[40] V Seshadri and J. Wesołowski. Constancy of regressions for beta distributions. *Sankhyā*, 65(2):284–291, 2003.

[41] D. Shlyakhtenko and T. Tao. Fractional free convolution powers, 2019. Preprint, arXiv:2009.01882.

[42] Dimitri Shlyakhtenko. Free quasi-free states. *Pacific J. Math.*, 177(2):329–368, 1997.

[43] P. Śniady and R. Speicher. Continuous family of invariant subspaces for R-diagonal operators. *Invent. Math.*, 146(2):329–363, 2001.

[44] R. Speicher. Multiplicative functions on the lattice of noncrossing partitions and free convolution. *Math. Ann.*, 298(4):611–628, 1994.

[45] R. Speicher and R. Woroudi. Boolean convolution. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 of *Fields Inst. Commun.*, pages 267–279. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[46] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. I*, volume 124 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[47] V. Vasilchuk. On the asymptotic distribution of the commutator and anticommutator of random matrices,. *J. Math. Phys.*, 44, 2003.

[48] D. V. Voiculescu. Addition of certain noncommuting random variables. *J. Funct. Anal.*, 66(3):323–346, 1986.

[49] D. V. Voiculescu. Multiplication of certain noncommuting random variables. *J. Operator Theory*, 18(2):223–235, 1987.

[50] D. V. Voiculescu. Limit laws for random matrices and free products. *Invent. Math.*, 104(1):201–220, 1991.

....
Kamil Szpojankowski